4.7. Aufgaben zum exponentiellen Wachstum

Aufgabe 1: Verlauf der Exponentialfunktion
Zeichne das Schaubild von $f(x) = 1{,}05^x$ in den folgenden Bereichen

a) x-Achse: $0 \leq x \leq 100$ mit 10 LE = 1 cm
y-Achse: $0 \leq y \leq 150$ mit 10 LE = 1 cm

b) x-Achse: $0 \leq x \leq 1000$ mit 100 LE = 1 cm
y-Achse: $0 \leq y \leq 10^{21}$ mit 10^{20} LE = 1 cm

Aufgabe 2: Bestimmung von Funktionsgleichungen
Bestimme die Gleichung der Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$, die durch die Punkte P und Q verläuft

a) $P(0|2)$ und $Q(1|4)$ b) $P(0|2)$ und $Q(1|\frac{1}{2})$ c) $P(1|1)$ und $Q(2|\frac{3}{2})$ d) $P(-1|3)$ und $Q(1|2)$

Aufgabe 3: Verschiebung von Exponentialfunktionen
Beschreibe die Verschiebungen, durch die die folgenden Funktionen aus $f(x) = 2^x$ hervorgehen und skizziere ihre Schaubilder.

a) $h(x) = 2^x + 3$ b) $h(x) = 2^x - 2$ c) $h(x) = 2^{x-1}$ d) $h(x) = 2^{x+3} - 1$

Aufgabe 4: Verschiebung von Logarithmusfunktionen
Beschreibe die Verschiebungen, durch die die folgenden Funktionen aus $f(x) = \log_2 x$ hervorgehen und skizziere ihre Schaubilder.

a) $h(x) = \log_2 (x) + 1$ b) $h(x) = \log_2 (x + 1)$ c) $h(x) = \log_2 (x - 2)$ d) $h(x) = \log_2 (x - 1) + 3$

Aufgabe 5: Umkehrfunktionen
Bestimme die Gleichung und den Definitionsbereich der Umkehrfunktionen $h^{-1}(x)$ zu den Funktionen h(x) aus den Aufgaben 4 und 5.

Aufgabe 6: Exponentielles Wachstum bei Zinseszins
Bei einer Geldanlage werden die jährlich anfallenden Zinserträge direkt wieder angelegt und in den folgenden Jahren mitverzinst. Ein Kapital K(0) = 10 000 € wurde zu p = 5 % angelegt. K(t) sei der Wert der Anlage nach t Jahren.

a) Berechne den Anlagewert K(t) nach t = 1, 2, 3, 4, 5, 10 und 20 Jahren
b) Beschreibe den Verlauf des Kapitalwachstums für einen Zeitraum von 20 Jahren durch ein Schaubild. Trage dazu auf der t-Achse die Jahre und auf der y-Achse das Kapital K(t) nach t Jahren auf.
c) Stelle eine Formel auf, mit der sich das Kapital K(t) nach t Jahren berechnen lässt.
Hinweis: $K(t) = 10000 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{t-mal}} = 10000 \cdot a^t$ mit einer passenden Basis a.
d) Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?
e) Die obige Formel gilt für einen Zinssatz von p = 5 %. Welche Formel ergibt sich für den Zinssatz p = 6 %, 7 %, usw.? Stelle eine Formel auf, mit der sich das Kapital K(t) nach t Jahren in Abhängigkeit vom Zinssatz p berechnen lässt.
f) Zeige, dass die Zuwächse $K(t + 1) - K(t)$ proportional zum bereits vorhandenen Kapital K(t) sind und bestimme die Wachstumskonstante k in Abhängigkeit von p: $K(t + 1) - K(t) = k \cdot K(t)$. Begründe damit den verbreiteten Milliardärsseufzer „Die erste Million war die schwerste“.

Aufgabe 7: Exponentielles Wachstum einer Pilzkultur
Bei ausreichendem Angebot an Raum und Nährstoffen vermehrt sich eine Pilzkultur stündlich um p = 4%. In einem biologischen Labor gelangen versehentlich Z(0) = 1000 Zellen dieser Kultur in den Vorratsbehälter für die Nähestofflösung.

a) Wie viele Zellen enthält die Kultur am nächsten Tag bzw. nach einer Woche um die gleiche Uhrzeit?
b) Gib eine Formel an, mit der sich Z(t) nach t Stunden berechnen lässt.
c) Nach wie vielen Stunden hat sich der Bestand verdreifacht?
d) Gib eine Formel an, mit der sich Z(t’) nach t’ Minuten berechnen lässt.
e) Gib eine Formel an, mit der sich Z(t’’) nach t’’ Tagen berechnen lässt.

Aufgabe 8: Exponentielle Abnahme bei radioaktivem Zerfall
Das radioaktive Isotop ^{137}Cs zerfällt mit einer Rate von 2,2 % pro Jahr, d.h. nach einem Jahr sind jeweils 2,2 % der ursprünglich vorhandenen Atome zerfallen, womit auch die Radioaktivität in diesem Zeitraum um 2,2 % abgenommen hat. Z(t) sei die Zahl der Atome nach t Jahren.

a) Berechne Z(t) für t = 1, 2, 3, 5, 10, 50 und 100, wenn Z(0) = 1000 Atome
b) Beschreibe den Verlauf des Zerfalls für einen Zeitraum von 100 Jahren durch ein Schaubild. Trage dazu auf der t-Achse die Jahre und auf der y-Achse die Zahl Z(t) der nach t Jahren noch vorhandenen Atome auf.

c) Stelle eine Formel auf, mit der sich die Zahl Z(t) der nach t Jahren noch vorhandenen Atome berechnen lässt.
d) Nach wie vielen Jahren ist die Zahl der Atome und damit die Radioaktivität auf die Hälfte des ursprünglichen Wertes abgesunken?

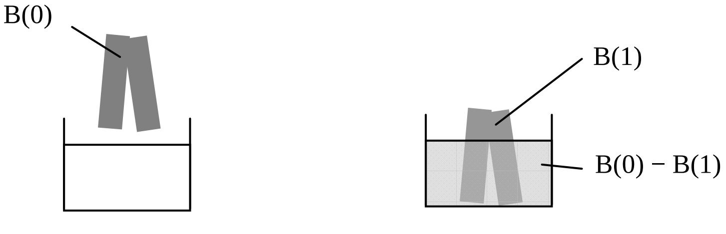
Aufgabe 9: Berechnung von B(0) und p aus gegebenen Daten beim radioaktiven Zerfall
Das Isotop ^{131}Iod hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen, d.h., die Zahl der Iodmoleküle halbiert sich infolge des radioaktiven Zerfalls alle 8 Tage.
a) Berechne die tägliche Abnahme der Zahl der Iodmoleküle in %.
b) Berechne die wöchentliche Abnahme der Zahl der Iodmoleküle in %
c) 100 mg ^{131}Iod wurden abgewogen und verpackt. Berechne die Masse dieser Probe nach 5 Tagen.
d) Nach wie vielen Tagen ist die Masse der Probe aus c) auf 10 mg abgesunken?
e) Eine 10 Tage alte Probe wiegt noch 84 mg. Berechne ihre ursprüngliche Masse.
f) Eine Probe des Isotops ^{210} Ra wog nach 4 Tagen noch 57,3 mg und nach 7 Tagen noch 37,7 mg. Berechne die tägliche Abnahme der Zahl der Radiumatome und die ursprüngliche Masse der Probe.

Aufgabe 10: Exponentielle Abnahme im Stoffwechsel
Um zu untersuchen, ob eine Bauchspeicheldrüse normal arbeitet, spritzt man dem Patienten einen Farbstoff und misst, wie schnell er ausgeschieden wird. Man weiß, dass die Bauchspeicheldrüse pro Minute etwa 4 % der jeweils vorhandenen Farbstoffmenge ausscheidet.
a) Einem Patienten werden 0,3g des Farbstoffes gespritzt, nach 20 Minuten sind 0,1 g ausgeschieden. Arbeitet seine Bauchspeicheldrüse normal?
b) Wie viel Prozent des vorhandenen Farbstoffes scheidet die untersuchte Bauchspeicheldrüse pro min aus? Vergleiche mit einem gesunden Organ.
c) Wie lange dauert es bei einer gesunden Bauchspeicheldrüse, bis die Hälfte des gespritzten Farbstoffes ausgeschieden ist? Wie lange dauert es bei dem untersuchten Patienten?

Aufgabe 11: Exponentielle Abnahme bei Verdünnung
Einem Landwirt ist am Neujahrsmorgen versehentlich seine Schnapsflasche in die Pferdetränke gefallen. Die Flasche enthielt einen Liter Schnaps mit 50 Vol % Alkohol. Die Viehtränke fasst 100 Liter Wasser, von denen 4 Liter pro Minute durch frisches Quellwasser ersetzt werden.
a) Wie viel Alkohol ist nach einer 1, 2 und 30 Minuten noch in der Pferdetränke?
b) Wie lange dauert es, bis nur noch 1 ml Alkohol im Becken ist?

Aufgabe 12: Exponentielles Wachstum bei einer Treibstoffexplosion
Die Explosion in der Zylinderkammer eines Ottomotors wird durch einen Zündfunken ausgelöst. Dieser Zündfunke bringt aber zunächst nur T(0) = 1000 Treibstoffmoleküle zur Reaktion mit Sauerstoff. Die Reaktionsprodukte von jeweils 100 Treibstoffmolekülen bringen durch Stoßvorgänge pro Nanosekunde 4 weitere Moleküle zur Reaktion.
a) Wie viele Moleküle, wurden nach 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100, 900 und. 1000 Nanosekunden umgesetzt?
b) Beschreibe den zeitlichen Verlauf der Reaktion für einen Zeitraum von 1000 Nanosekunden durch ein Schaubild. Verwende eine Exponentialdarstellung für die Beschriftung der y-Achse, z.B. $50000 = 5\cdot 10^4$.

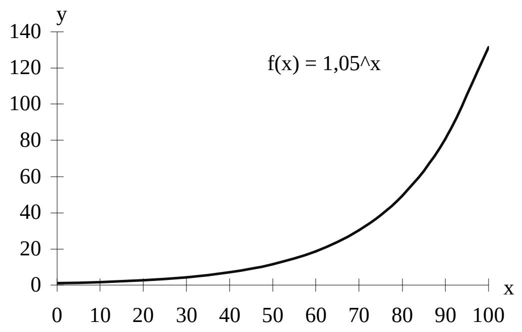
Aufgabe 13: Exponentielle Abnahme der Verschmutzung beim Wäschewaschen
Eine Hose ist mit 10 g Erde verschmutzt und soll mit insgesamt 10 Litern Wasser gereinigt werden. Je mehr Waschwasser verwendet wird, desto größer ist der Anteil der heraus gelösten Erde: $\frac{B(0) - B(1)}{B(1)} = 0{,}1\cdot V$ bei V Litern Waschwasser. Nun stellt sich die Frage, ob günstiger ist, das ganze Waschwasser in einem Waschgang zu verwenden oder das Waschwasser auf mehrere Waschgänge auf zu teilen.

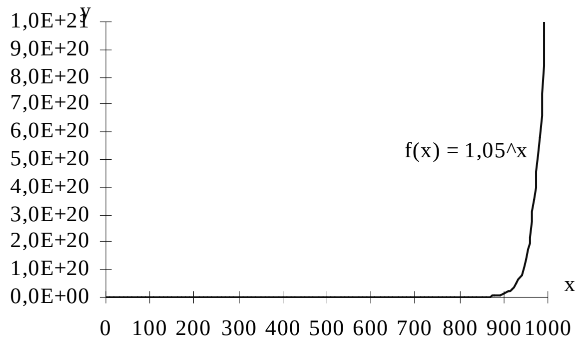


a) Berechne die Restverschmutzung B(1) nach einmaligem Reinigen mit V = 10 Litern Wasser.
b) Zeige durch Auflösen der obigen Gleichung nach B(1), dass $B(1) = B(0)\cdot a$ und berechne den Faktor a in Abhängigkeit von V.
c) Zeige, dass die Restverschmutzung nach dem t-ten Waschgang $B(t) = B(0)\cdot a^t$ ist.
d) Berechne die Restverschmutzung nach zehnmaligem Reinigen mit jeweils V = 1 Litern Wasser.
e) Berechne die Restverschmutzung nach zwanzigmaligem Reinigen mit jeweils V = 0,5 Litern Wasser.

4.7. Lösungen zu den Aufgaben zu exponentiellen Änderungen

Aufgabe 1: Exponentialfunktion





Aufgabe 2: Bestimmung von Funktionsgleichungen

a) $f(x) = 2\cdot 2^x$ b) $f(x) = 2\cdot 4^{-x}$ c) $f(x) = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x$ d) $f(x) = \sqrt{6}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{2}}$

Aufgabe 3: Verschiebung von Exponentialfunktionen

a) um $y_0 = 3$ nach oben
b) um $y_0 = -2$ nach unten
c) um $x_0 = 1$ nach rechts
d) um $x_0 = -3$ nach links und $y_0 = -1$ nach unten

Aufgabe 4: Verschiebung von Logarithmusfunktionen

a) um $x_0 = 1$ nach oben
b) um $x_0 = -1$ nach links
c) um $x_0 = 2$ nach rechts
d) um $x_0 = 1$ nach rechts und $y_0 = 3$ nach oben

Aufgabe 5: Umkehrfunktionen

Aufgabe 4

a) $h^{-1}(x) = \log_2 (x - 3)$ mit $D =]3; \infty[$
b) $h^{-1}(x) = \log_2 (x + 2)$ mit $D =]-2; \infty[$
c) $h^{-1}(x) = \log_2 (x) + 1$ mit $D =]0; \infty[$
d) $h^{-1}(x) = \log_2 (x + 1) - 3$ mit $D =]-1; \infty[$

Aufgabe 5

a) $h^{-1}(x) = 2^{x-1}$ mit $D = \mathbb{R}$
b) $h^{-1}(x) = 2^x - 1$ mit $D = \mathbb{R}$
c) $h^{-1}(x) = 2^x + 2$ mit $D = \mathbb{R}$
d) $h^{-1}(x) = 2^{x-3} + 1$ mit $D = \mathbb{R}$

Aufgabe 6: Exponentielles Wachtum bei Zinsezins

$K(t) = 1{,}05^t\cdot 10000$ €, $k = \frac{p}{100}$

Aufgabe 7: Exponentielles Wachstum einer Pilzkultur

$Z(t) = 1{,}04^t\cdot 1000$, $p = 4\ \%$, $a' = 1{,}04^{1/60} = 1{,}00065 \Rightarrow p' = 0{,}065\ \%$, $a'' = 1{,}04^{24} = 2{,}56 \Rightarrow p'' = 156\ \%$, $k = \frac{p}{100}$

Aufgabe 8: Exponentielle Abnahme bei radioaktivem Zerfall

$Z(t) = 0{,}978^t\cdot 1000$ mit Halbwertszeit $t_{1/2} = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}978} = 31{,}1$ Tage

Aufgabe 9: Berechnung von B(0) und p aus gegebenen Daten beim radioaktiven Zerfall

a) $Z(t) = (1 + \frac{p}{100})^t \cdot Z(0)$ mit $Z(8) = 0{,}5 \cdot Z(0) \Rightarrow Z(t) = 0{,}917^t \cdot Z(0) \Rightarrow p = -\,8{,}3\ \%$.

b) t' Wochen sind t = 7·t' Tage $\Rightarrow Z(t') = 0{,}917^{7t'} \cdot Z(0) = 0{,}545^{t'} \cdot Z(0) \Rightarrow p' = 45{,}5\ \%$

c) $Z(5) = 0{,}917^5 \cdot 100$ mg = 64,8 mg

d) $Z(t) = 0{,}1\ Z(0) \Rightarrow t = \frac{\log 0{,}1}{\log 0{,}917} = 26{,}6$ Tage

e) 84 mg = $Z(10) = 0{,}917^{10} \cdot Z(0) \Rightarrow Z(0) = 200$ mg.

f) $Z(t) = (1 + \frac{p}{100})^t \cdot Z(0)$ mit Z(4) = 57,3 mg und Z(7) = 37,7 mg $\Rightarrow Z(t) = 0{,}87^t \cdot 100$ mg $\Rightarrow p = -\,13{,}0\ \%$ und Z(0) = 100 mg

Aufgabe 10: Exponentielle Abnahme im Stoffwechsel

a) Ansatz $B(t) = (1 - \frac{p}{100})^t \cdot B(0)$ mit B(0) = 0,3 g und B(20) = 0,2 g $\Rightarrow 1 - \frac{p}{100} = \sqrt[20]{\frac{0{,}2}{0{,}3}} \approx 0{,}98 \Rightarrow p = 2\%$, also Unterfunktion der Bauchspeicheldrüse.

b) p = 2 % (siehe a))

c) Halbwertszeit der gesunden Bauchspeicheldrüse: $0{,}5\ B(0) = 0{,}96^t \cdot B(0) \Rightarrow t = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}96} \approx 17$ Minuten und bei der kranken Bauchspeicheldrüse $t = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}98} \approx 34$ Minuten.

Aufgabe 11: Eexponentielle Abnahme bei Verdünnung

a) $B(t) = 500\ \text{ml} \cdot 0{,}96^t \Leftrightarrow B(t + 1) - B(t) = 0{,}04 \cdot B(t)$ nach t Minuten $\Rightarrow B(30) = 147$ ml

b) $B(t) \le 1$ ml $\Leftrightarrow t \ge \frac{\log 0{,}002}{\log 0{,}96} = 152{,}2$ Minuten = 2 Stunden und 32 Minuten

Aufgabe 12: Exponentielle Zunahme bei einer Treibstoffexplosion

$T(t) = 1{,}04^t \cdot 1000$ mit $T(1000) = 1{,}08 \cdot 10^{20}$

Aufgabe 13: Exponentielle Abnahme der Verschmutzung beim Wäschewaschen

a) $B(t) = \frac{1}{1 + 0{,}1 \cdot V} \cdot B(t-1) = \left(\frac{1}{1 + 0{,}1 \cdot V}\right)^t \cdot B(0)$.

b) $B(1) = \frac{1}{2} B(0)$

c) $B(10) = 1{,}1^{-10} \cdot B(0) = 0{,}386 \cdot B(0)$.

d) $B(20) = 1{,}05^{-20} \cdot B(0) = 0{,}377 \cdot B(0)$.