4.7. Aufgaben zum logistischen Wachstum

Aufgabe 1. exponentielles und logistisches Wachstum bei Populationen
Im Jahre 1705 wurden 5 Hasen auf einer Pazifikinsel ausgesetzt, um die Frischfleischversorgung bei künftigen Besuchen zu sichern. Ein Jahr später wurden bereits 12 Hasen gesichtet.

a) Bestimme die jährliche Zuwachsrate in %.
b) Wie viele Hasen wären bei der Annahme exponentiellen Wachstums im Jahre 1711 auf der Insel zu erwarten?
c) Nach jeweils wie vielen Monaten verdoppelt sich der Bestand unter der Annahme exponentiellen Wachstums?
d) Tatsächlich wurden auch Jahrzehnte nach der Aussetzung niemals mehr als 100 Hasen auf der Insel gezählt. Setze logistisches Wachstum an und berechne den Änderungsfaktor k auf 4 Nachkommastellen genau.
e) Wie viele Hasen wären im Jahr 1711 auf der Insel zu erwarten, wenn man den Ansatz für logistisches Wachstum verwendet?
f) Begründe den Ansatz für logistisches Wachstum anhand der Lebensumstände einer Hasenpopulation auf einer einsamen Insel: Warum ist der Zuwachs proportional zum Bestand ? Warum ist der Zuwachs aber auch proportional zum Sättigungsmanko?

Aufgabe 2: Exponentielles und logistisches Wachstum bei Pflanzen
Ein Löwenzahn ist bei Beobachtungsbeginn Anfang März 1 cm hoch. Nach einer Woche misst er schon 1,5 cm.

a) Wie hoch wäre der Löwenzahn nach 5 bzw. 10 Wochen, wenn man exponentielles Wachstum voraussetzt?
b) Erfahrungsgemäß werden Löwenzähne an diesem Standort aber höchstens 20 cm groß. Welche Höhe kann man für den beobachteten Löwenzahn nach 5 Wochen erwarten, wenn man logistisches Wachstum ansetzt?

Aufgabe 3: Exponentielles, beschränktes und logistisches Wachstum bei Bakterien
Auf einer 40 cm^2 großen Petrischale wird eine 1 cm^2 große Bakterienkolonie entdeckt. Am nächsten Tag bedeckt sie schon 1,5 cm^2.

a) Welche Fläche wäre unter der Annahme exponentiellen Wachstums nach 5 bzw. 10 Tagen bedeckt? Warum ist diese Annahme unrealistisch?
b) Welche Fläche wäre unter der Annahme beschränkten Wachstums nach 5 bzw. 10 Tagen bedeckt? Warum ist diese Annahme unrealistisch?
c) Welche Fläche wäre unter der Annahme logistischen Wachstums nach 5 Tagen bedeckt?

Aufgabe 4: Logistisches Wachstum bei Marktsättigung
Ein Sportverein hat 200 Mitglieder, die allesamt potentielle Biertrinker sind. Der aus 5 Personen bestehende Vorstand hat an einer Brauereiführung teilgenommen und trinkt seitdem nur noch die Marke „ohne Filter“. Eine Woche nach der Brauereiführung sind weitere 4 Mitglieder auf die Marke „ohne Filter“ umgestiegen. Wieviele Neukunden für die Marke „ohne Filter“ kann die Brauerei nach einem Monat erwarten, wenn sie davon ausgeht, dass sich die Zahl der Neukunden nach dem Gesetz des logistischen Wachstums verhält?

4.7. Lösungen zu den Aufgaben zum logistischen Wachstum

Aufgabe 1: exponentielles und logistisches Wachstum

a) $Z(t) = (1 + \frac{p}{100})^t \cdot Z(0)$ mit $Z(0) = 5$ und $Z(1) = 12 \Rightarrow Z(t) = 2{,}4^t \cdot 5$ mit $p = 140$ %.

b) $Z(9) = 2{,}4^6 \cdot 5 \approx 956$ Hasen

c) $Z(t) = 2 \cdot Z(0) \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 2{,}4} = 0{,}8$ Jahre $\approx 9{,}5$ Monate

d) Ansatz $Z(t + 1) = Z(t) + k \cdot Z(t) \cdot (S - Z(t))$ mit $S = 100$, $Z(1) = 12$ und $Z(0) = 5 \Rightarrow k = 0{,}0147$

e) $Z(0) = 5$, $Z(1) = 12$, $Z(2) = 28$, $Z(3) = 58$, $Z(4) = 94$, $Z(5) = 102$, $Z(6) = 99$

f) Bestand ≈ Paarungsmöglichkeiten, Sättigungsmanko ≈ Futterreserven der Insel.

Aufgabe 2: Exponentielles und logistisches Wachstum bei Pflanzen

a) Ansatz $B(t) = B(0) \cdot (1 + \frac{p}{100})^t$ mit $B(0) = 1$ cm und $B(1) = 1{,}5$ cm $\Rightarrow p = 50 \Rightarrow B(5) = 7{,}6$ cm und $B(10) = 57$ cm

b) $B(t + 1) - B(t) = k \cdot B(t) \cdot (20 - B(t))$ mit $B(0) = 1$ cm und $B(1) = 1{,}5$ cm $\Rightarrow k = \frac{1}{38} \Rightarrow B(2) = 2{,}23$ cm, $B(3) = 3{,}27$ cm, $B(4) = 4{,}71$ cm und $B(5) = 6{,}6$ cm

Aufgabe 3: Exponentielles, beschränktes und logistisches Wachstum bei Bakterien

$B(t) = 1\text{ cm}^2 \cdot 1{,}5^t \Rightarrow B(5) = 7{,}59\text{ cm}^2$ und $B(10) = 57{,}6\text{ cm}^2 \Rightarrow$ zu schnell

$B(t + 1) - B(t) = k \cdot [S - B(t)]$ mit $S = 40\text{ cm}^2$, $B(0) = 1\text{ cm}^2$ und $B(1) = 1{,}5\text{ cm}^2 \Rightarrow k = \frac{1}{78} \Rightarrow B(t) = 40\text{ cm}^2 - 39\text{ cm}^2 \cdot \left(\frac{77}{78}\right)^t \Rightarrow B(5) = 3{,}4\text{ cm}^2$ und $B(10) = 5{,}7\text{ cm}^2 \Rightarrow$ zu langsam

$B(t + 1) - B(t) = k \cdot B(t) \cdot [S - B(t)]$ mit $S = 40\text{ cm}^2$, $B(0) = 1\text{ cm}^2$ und $B(1) = 1{,}5\text{ cm}^2 \Rightarrow k = \frac{1}{78} \Rightarrow B(2) = 2{,}24\text{ cm}^2$, $B(3) = 3{,}32\text{ cm}^2$, $B(4) = 4{,}9\text{ cm}^2$, $B(5) = 7{,}07\text{ cm}^2$, $B(6) = 10{,}05\text{ cm}^2$ und $B(7) = 13{,}9\text{ cm}^2$

Aufgabe 4: Logistisches Wachstum bei Marksättigung
Ansatz: $B(t + 1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot [S - B(t)]$, wobei $B(t)$ = Zahl der Neukunden t Wochen nach der Brauereiführung
Gegeben: Startwert $B(0) = 5$, $B(1) = 9$ und Sättigungsgrenze $S = 200$
Gesucht: $B(4)$, dazu wird noch der Änderungsfaktor k benötigt.

Einsetzen: $B(1) = B(0) + k \cdot B(0) \cdot [S - B(0)]$ bzw. $9 = 5 + k \cdot 5 \cdot [200 - 5] \Leftrightarrow 4 = k \cdot 975 \Leftrightarrow k = \frac{4}{975} \approx 0{,}004 \Rightarrow B(t + 1) = B(t) + 0{,}004 \cdot B(t) \cdot [200 - B(t)]$ mit Startwert $B(0) = 5$ und $B(1) = 9$. Einsetzen ergibt $B(2) \approx 16$, $B(3) \approx 28$ und $B(4) \approx 48$