4.7. Prüfungsaufgaben zum beschränkten Wachstum

Aufgabe 1: Exponentielle Abnahme und beschränktes Wachstum
In einem Raum befinden sich eine Million Radonatome. Duch radioaktiven Zerfall vermindert sich die Zahl der Radonatome täglich um 3%.

a) Zeige, dass sich die Zahl der nach t Tagen **bereits zerfallenen** Radonatome nach dem Gesetz des beschränkten Wachstums verhält und gib den Startwert, den Änderungsfaktor und die Sättigungsgrenze an.
b) Zeige, dass sich die Zahl der nach t Tagen **noch vorhandenen** Radonatome exponentiell vermindert und gib den Startwert sowie den Änderungsfaktor an.

Lösung

a) **Ansatz** $B(t + 1) = B(t) + k\cdot[S - B(t)]$, wobei B(t) = Zahl der nach t Tagen bereits **zerfallenen** Radonatome. Mit Startwert $B(0) = 0$, Sättigungsgrenze $S = 10^6$ und $k = 3\% = \frac{3}{100} = 0{,}03$ erhält man $B(t + 1) - B(t) = 0{,}03\cdot[10^6 - B(t)]$.

b) **Ansatz 1** $[S - B(t)] = [S - B(0)]\cdot(1 + \frac{p}{100})^t$, wobei $[S - B(t)]$ = Zahl der nach t Tagen noch **übrigen** Radonatome (= „**Sättigungsmanko**“). Mit Startwert $[S - B(0)] = [10^6 - 0] = 10^6$ und p = 3 erhält man $B(t) = 10^6\cdot0{,}97^t$.
Ansatz 2 $B(t + 1) = B(t) + k\cdot[S - B(t)] \Leftrightarrow S - B(t + 1) = S - B(t) - k\cdot[S - B(t)] = (1 - k)\cdot[S - B(t)] = (1 - k)^{t+1}\cdot[S - B(0)]\cdot = 0{,}97^t\cdot10^6$ mit den Angaben aus a).

Aufgabe 2: Beschränktes Wachstum (6)
Ein Gebirgsbach mit einem Volumenstrom von 1000 m^3 pro Tag wird durch einen Erdrutsch auf einer flachen Wiese zu einem kleinen Teich gestaut. Pro Tag versickern 40 % des gestauten Wassers in der Wiese.

a) Zeige, dass die Entwicklung der gestauten Wassermenge dem Gesetz des beschränkten Wachstums folgt und gib die Sättigungsgrenze S sowie die prozentuale Änderungsrate p an (2)
b) Berechne das Teichvolumen nach 5 Tagen für den Fall, dass die Wiese zum Zeitpunkt des Erdrutsches trocken war. (2)
c) Berechne das Teichvolumen nach 5 Tagen für den Fall, dass sich auf der Wiese zum Zeitpunkt des Erdrutsches durch einen Regenguss schon 1000 m^3 Wasser gesammelt hatten. (1)
d) Berechne das Teichvolumen nach 5 Tagen für den Fall, dass sich auf der Wiese zum Zeitpunkt des Erdrutsches durch einen Regenguss schon 3000 m^3 Wasser gesammelt hatten. (1)

Lösung

a) $W(t + 1) = 0{,}6\cdot W(t) + 1000 = W(t) + 0{,}4(2500 - W(t))$ mit W(t) in m^3 und t in Tagen seit Erdrutsch. (2)
b) $W(0) = 0 \Rightarrow W(t) = 2500 - 2500\cdot0{,}4^t \Rightarrow W(5) = 2474{,}4\ m^3$. (2)
c) $W(0) = 1000 \Rightarrow W(t) = 2500 - 1500\cdot0{,}4^t \Rightarrow W(5) = 2484{,}64\ m^3$. (1)
d) $W(0) = 3000 \Rightarrow W(t) = 2500 + 500\cdot0{,}4^t \Rightarrow W(5) = 2505{,}12\ m^3$. (1)

Aufgabe 3: Beschränktes Wachstum (4)
Für die Zucht von Karpfen sind flache und großflächige Gewässer geeignet. Da an heißen Tagen ein Teil des Wassers verdunstet, muss laufend frisches Wasser zugeführt werden. Bei einem 7000 m^2 großen und durchschnittlich 80 cm tiefen Teich verdunsten an einem Tag 0,5 % des Wassers.

a) Wie viel Kubikmeter Wasser müssen zum Ausgleich zugeführt werden?
b) An jedem Abend werden 30 m^3 zugeführt. Bestimme die Wassermenge nach 1; 2 und 10 Tagen sowie auf lange Sicht.
c) Zeige durch Rechnung, dass für das Wasservolumen V(n) nach n + 1 Tagen gilt: $V(n + 1) = V(n) + c\cdot(S - V(n))$. Berechne S.

Lösung

a) $V(0) = 7000\ m^2\cdot0{,}8\ m = 5600\ m^3 \Rightarrow$ Ausgleich durch 0,5 % von $V(0) = 0{,}005\cdot5600\ m^3 = 28\ m^3$ (1)
b) $V(1) = 5602\ m^3$, $V(2) = 5609{,}9\ m^3$, $V(10) = 5619{,}6\ m^3$ und $V(\infty) = S = 30\ m^3:0{,}005 = 6000\ m^3$. (2)
c) $V(n + 1) = V(n) + c\cdot(S - V(n)) = V(n) + 0{,}005\cdot(6000-V(n)) = V(n) + 30 - 0{,}005\cdot V(n) = 30 + 0{,}995\cdot V(n)$.(1)

Aufgabe 4: Beschränktes Wachstum (4)
Für die Zucht von Karpfen sind flache und großflächige Gewässer geeignet. Da an heißen Tagen ein Teil des Wassers verdunstet, muss laufend frisches Wasser zugeführt werden. Bei einem 8000 m^2 großen und durchschnittlich 90 cm tiefen Teich verdunsten an einem Tag 0,6 % des Wassers.

a) Wie viel Kubikmeter Wasser müssen zum Ausgleich zugeführt werden?
b) An jedem Abend werden 50 m^3 zugeführt. Bestimme die Wassermenge nach 1; 2 und 10 Tagen sowie auf lange Sicht.
c) Zeige durch Rechnung, dass für das Wasservolumen V(n) nach n + 1 Tagen gilt: $V(n + 1) = V(n) + c\cdot(S - V(n))$. Berechne S.

Lösung

a) $V(0) = 8000\ m^2\cdot 0{,}9\ m = 7200\ m^3 \Rightarrow$ Ausgleich durch 0,6 % von $V(0) = 0{,}006\cdot 7200\ m^3 = 43{,}2\ m^3$ (1)
b) $V(1) = 7206{,}8\ m^3$, $V(2) = 7213{,}6\ m^3$, $V(10) = 7266{,}2\ m^3$ und $V(\infty) = S = 50\ m^3 : 0{,}006 = 8333{,}3\ m^3$. (2)
c) $V(n + 1) = V(n) + c\cdot(S - V(n)) = V(n) + 0{,}006\cdot(8333{,}3 - V(n)) = V(n) + 50 - 0{,}006\cdot V(n) = 50 + 0{,}994\cdot V(n)$.(1)

Aufgabe 5: beschränktes Wachstum (5)
Ein See wird seit Beginn der Stallhaltezeit im November über seine Zuflüsse durch 1 m^3 reine Gülle pro Tag bereichert. Durch den Abfluss wird jeden Tag 1 % der im See vorhanden Gülle wieder abgeführt. Den Sommer über war der See güllefrei.

a) Berechne den Güllegehalt G(t) nach t = 1, 2, 3 und 4 Tagen. (2)
b) Formuliere die Gleichung, mit der sich G(t + 1) berechnen lässt, wenn G(t) bereits bekannt ist. (1)
c) Zeige, dass die Entwicklung des Güllegehaltes dem Gesetz des beschränkten Wachstums folgt und gib die Sättigungsgrenze S sowie die prozentuale Änderungsrate p an (2)

Lösung

a) $G(1) = 1$, $G(2) = 1{,}99$, $G(3) = 2{,}97$ und $G(4) = 3{,}94$ (2)
b) $G(t + 1) = 0{,}99\cdot G(t) + 1$ mit $G(0) = 0$ (1)
c) $G(t + 1) = 0{,}99\cdot G(t) + 1 \Leftrightarrow G(t + 1) - G(t) = 0{,}01\cdot[100 - G(t)]$ (1)
$\Rightarrow$ beschränktes Wachstum mit $S = 100\ m^3$ und $p = 1\ \%$ (1)

Aufgabe 6: Beschränktes Wachstum (5)
In einem Land mit 80 Millionen Einwohnern kommen laut Statistik auf 1000 Einwohner 9 Geburten und 11 Todesfälle im Jahr. Die Statistik gibt ferner an, dass im Durchschnitt jährlich 20000 Personen auswandern und 220000 Personen einwandern.

a) Berechne die Einwohnerzahl Z(t) nach t Jahren für t = 1, 2, 3 und 4 (2)
b) Formuliere die Gleichung, mit der sich Z(t + 1) berechnen lässt, wenn Z(t) bereits bekannt ist. (1)
c) Zeige, dass die Entwicklung der Einwohnerzahl dem Gesetz des beschränkten Wachstums folgt und gib die Sättigungsgrenze S sowie die prozentuale Änderungsrate p an. (2)

Lösung

a) $Z(0) = 80{,}00$ Mio; $Z(1) = 80{,}04$ Mio; $Z(2) = 80{,}07$ Mio; $Z(3) = 80{,}10$ Mio; $Z(4) = 80{,}15$ Mio (2)
b) $Z(t + 1) = 200000 + 0{,}998\cdot Z(t)$ mit $Z(0) = 80{,}00$ Mio (1)
c) $Z(t + 1) - Z(t) = 200000 - 0{,}002\cdot Z(t) = 0{,}002\cdot(100\text{ Mio} - Z(t))$ (1)
$\Rightarrow$ beschränktes Wachstum mit S = 100 Mio und p = 0,2%. (1)

Aufgabe 7: Beschränktes Wachstum (5)
In einer Klinik wird einem Patienten durch eine Tropfinfusion ein (bis dahin im Körper nicht vorhandenes) Medikament verabreicht. Dabei gelangt je min eine gleich bleibende Menge von 3 mg des Medikaments ins Blut. Von der im Blut vorhandenen Menge werden je Minute 2 % über die Nieren wieder ausgeschieden.

a) Berechne den Gehalt B(t) des Medikamentes im Blut für t = 1, 2, 3 und 4 Minuten. (2)
b) Formuliere die Gleichung, mit der sich B(t + 1) berechnen lässt, wenn B(t) bereits bekannt ist. (1)
c) Zeige, dass langfristig ein etwa gleich bleibender „Medikamentenspiegel“ im Blut vorhanden sein wird. Wie hoch liegt er? (2)

Lösung

a) $B(0) = 3$ mg; $B(1) = 2{,}94$ mg; $B(2) = 5{,}82$ mg; $B(3) = 8{,}71$ mg und $B(4) = 11{,}53$ mg (2)
b) $B(t + 1) = 3\text{ mg} + 0{,}98\ B(t)$ (1)
c) $B(t + 1) - B(t) = 3\text{ mg} - 0{,}02\cdot B(t) = 0{,}02\cdot(150\text{ mg} - B(t))$ (1)
$\Rightarrow$ beschränktes Wachstum mit S = 150 mg und p = 2%. (1)

Aufgabe 8: beschränkte Abnahme (8)

Am 1. 1. 2006 wurde bei einer Bank ein Kredit in Höhe von 20 000 € aufgenommen zu einen Jahreszinssatz von 8 % auf die im Laufe des jeweiligen Jahres noch bestehende Restschuld. Es wurde vereinbart, dass jeweils am Jahresende 2 000 € für die zu zahlenden Zinsen und für die Abzahlung des Kredits (Tilgung) an die Bank zu überweisen sind.

a) Berechne schrittweise, welche Restschuld am 1. 1. 2008 noch bestand.

b) Welcher Anteil (in Prozent) des bis dahin an die Bank überwiesenen Geldes waren Zinsen?

Lösung

a) $B(0) = 20\,000$ am 1. 1. 2004 und $B(t + 1) = 1{,}08 \cdot B(t) - 2000$ für die folgenden Jahre

(⇒ $B(t + 1) - B(t) = -0{,}08 \cdot (25\,000 - B(t)$ ⇒ beschränkte Abnahme (!))

1. 1. 2005: $B(1) = 19600$ €

1. 1. 2006: $B(2) = 19168$ €

1. 1. 2007: $B(3) = 18701$ €

1. 1. 2008 $B(4) = 18198$ € (4)

b) Insgesamt wurden überwiesen $4 \cdot 2000 = 8000$ € (1)

davon Tilgung $20\,000 - 18198 = 1802$ € (1)

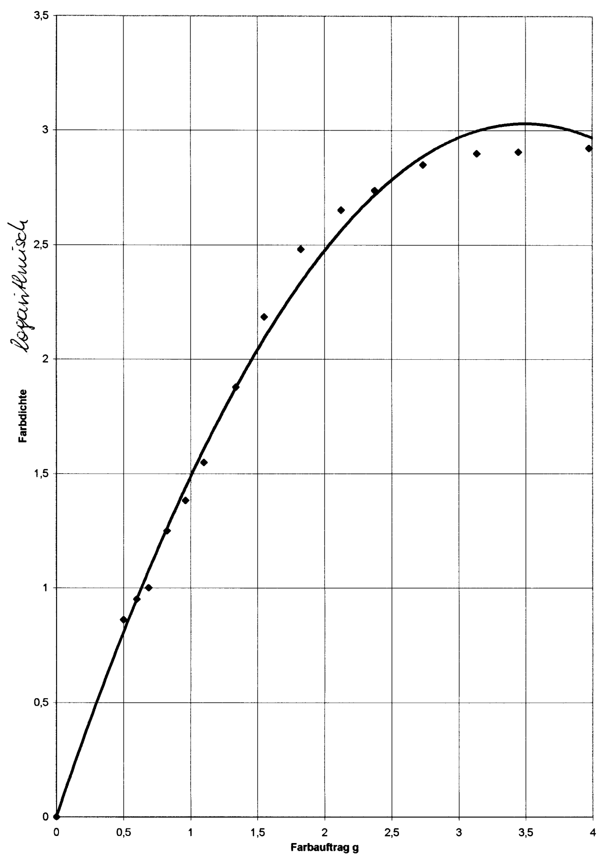
Zinsanteil $8000 - 1802 = 6198$ € (1)

Prozentual $\frac{6198}{8000} = 77{,}47\ \%$ (1)

Aufgabe 9: Beschränktes Wachstum bei der Farbdichte von bedruckten Stoffen

Um den optimalen Farbauftrag für einen blau zu färbenden Stoff zu ermitteln, wurde die Farbdichte D(a) (als Maß für die Farbintensität oder Farbwirkung) für verschiedene Farbaufträge a gemessen. Die Meßwerte wurden mit MS Excel in das folgenden Schaubild eingetragen, wobei das Programm die schwarze Kurve als **Näherungskurve** vorschlug.

Nr	Farbauftrag a in g/m^2	gemessene Farbdichte D(a)
1	0,5000	0,86
2	0,6000	0,95
3	0,6875	1,00
4	0,8250	1,25
5	0,9625	1,38
6	1,1000	1,55
7	1,3375	1,88
8	1,5500	2,19
9	1,8250	2,48
10	2,1250	2,65
11	2,3750	2,74
12	2,7375	2,85
13	3,1375	2,90
14	3,4500	2,91
15	3,9750	2,92
16	4,4500	2,93



a) Beschreibe den Verlauf der gemessenen Kurve in Worten. Was läßt sich für den weiteren Verlauf der Kurve vermuten? Lässt sich die Farbintensität beliebig steigern oder wird sie bei noch dickeren Farbaufträgen wieder sinken? Begründe!

b) Welchem (wohlbekannten!) Funktionstyp würdest du die schwarze Näherungskurve zuordnen? Warum ist dieser Funktionstyp im Hinblick auf die in a) gewonnen Erkenntnisse sicher nicht geeignet?

c) Wir wissen mehr als Excel und greifen auf den Ansatz für beschränktes Wachstum zurück. Ermittle zunächst D(0) und S aus dem Schaubild. Berechne nun den Wachstumsfaktor k für die markierten Meßwerte Nr. 8 - 12 und bilde anschließend den Mittelwert. Warum läßt sich der Ansatz $D(a + 1) - D(a) = k \cdot (S - D(a))$ nicht verwenden?

d) Berechne D(a) für a = 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5 und 4 mit den in c) und d) ermittelten Werten für S und k.
e) Trage die Werte aus e) in das Schaubild ein und vergleiche deine Näherungskurve mit der Näherungsparabel von Excel. In welchem Bereich ist deine Kurve genauer als die von Excel?

Lösungen:

a) Je dicker der Farbauftrag, desto höher ist die Farbintensität. Die Farbintensität läßt sich jedoch nicht beliebig steigern und nähert sich einer Sättigungsgrenze. Der Farbstoff wird sich mit wachsendem Farbauftrag wie eine dicke Schicht auf dem Stoff ablagern, deren Farbintensität mit wachsender Schichtdicke kaum noch zunimmt.
b) Es handelt sich offensichtlich um eine Parabel, die für geringe Farbaufträge gut mit den gemessenen Werten übereinstimmt, aber bei größeren Werten immer mehr abweicht und jenseits des Scheitelpunktes steil wieder nach unten fällt.
c) $S \approx 3$ und $A(0) \approx 0$ bieten sich an.
d) $S - D(a) = k^a \cdot [S - D(0)] \Rightarrow k = \sqrt[a]{\frac{S - D(a)}{S - D(0)}} = \sqrt[a]{\frac{3 - D(a)}{3}}$. Man erhält $k_8 = 0{,}426$, $k_9 = 0{,}383$, $k_{10} = 0{,}364$, $k_{11} = 0{,}357$, $k_{12} = 0{,}335$ und als Mittelwert $k \approx 0{,}373$
e) D(1) = 1,88; D(1,5) = 2,31; D(2) = 2,58; D(2,5) = 2,75; D(3) = 2,84; D(3,5) = 2,90 und D(4) = 2,94.
f) Die beste Übereinstimmung ist in dem Bereich, der für die Bestimmung von k herangezogen wurde.

Aufgabe 10: Beschränktes Wachstum bei einer chemischen Reaktion

Bei der Umwandlung eines Stoffes A in den Stoff B gemäß $A \rightleftharpoons B$ ist die Hinreaktion viermal so schnell wie die Rückreaktion: $v_{A\to B}(t) = 0{,}4 \cdot c_A(t)$ und $v_{B\to A}(t) = 0{,}1 \cdot c_B(t)$, wobei die Konzentrationen $c_A(t)$ und $c_B(t)$ nach jeweils t Sekunden in mmol/ml angegeben werden.
Nach t + 1 Sekunden ist dann
$c_A(t + 1) = c_A(t) - v_{A\to B}(t) + v_{B\to A}(t)$ und
$c_B(t + 1) = c_B(t) + v_{A\to B}(t) - v_{B\to A}(t)$.
Die Gesamtkonzentration soll $c_0 = 1$ mmol/ml sein, so dass $c_A(t) + c_B(t) = c_0 = 1$ mmol/ml.

a) Zeige, dass

$c_A(t + 1) - c_A(t) = 0{,}5 \cdot (S_A - c_A(t)$ mit $S_A = \frac{1}{5} c_0$ und

$c_B(t + 1) - c_B(t) = 0{,}5 \cdot (S_B - c_B(t)$ mit $S_B = \frac{4}{5} c_0$

b) Berechne $c_A(1)$, $c_A(2)$ und $c_A(3)$ sowie $c_B(1)$, $c_B(2)$ und $c_B(3)$ für $c_A(0) = 1$ mmol/ml und $c_B(0) = 0$ mmol/ml.
c) Berechne $c_A(1)$, $c_A(2)$ und $c_A(3)$ sowie $c_B(1)$, $c_B(2)$ und $c_B(3)$ für $c_A(0) = 0$ mmol/ml und $c_B(0) = 1$ mmol/ml.
d) Zeige, dass

$S_A - c_A(t) = (S_A - c_A(0)) \cdot 0{,}5^t$ mit $S_A = \frac{1}{5} c_0$ und

$S_B - c_B(t) = (S_B - c_B(0)) \cdot 0{,}5^t$ mit $S_B = \frac{4}{5} c_0$.

e) Skizziere $c_A(t)$ und $c_B(t)$ für $0 \le t \le 10$ mit $c_A(0) = 1$ mmol/ml und $c_B(0) = 0$ mmol/ml.
f) Skizziere $c_A(t)$ und $c_B(t)$ für $0 \le t \le 10$ mit $c_A(0) = 0$ mmol/ml und $c_B(0) = 1$ mmol/ml.
g) Berechne die Geschwindigkeiten $v_{A\to B}(t) = 0{,}4 \cdot c_A(t)$ und $v_{B\to A}(t) = 0{,}1 \cdot c_B(t)$ für t = 0, 5 und 10 s und erkläre mit Hilfe dieser Zahlen, warum sich das Gleichgewicht gerade im Verhältnis $c_a : c_B = 1 : 4$ stabilisiert.

Lösungen:

a) $c_A(t + 1) - c_A(t) = - v_{A\to B}(t) + v_{B\to A}(t) = -0{,}4 \cdot c_A(t) + 0{,}1 \cdot c_B(t) = -0{,}4 \cdot c_A(t) + 0{,}1 \cdot (c_{ges} - c_A(t)) = 0{,}5 \cdot (\frac{1}{5} c_{ges} - c_A(t)$

$c_B(t + 1) - c_B(t) = + v_{A\to B}(t) - v_{B\to A}(t) = +0{,}4 \cdot c_A(t) - 0{,}1 \cdot c_B(t) = +0{,}4 \cdot (c_{ges} - c_B(t)) - 0{,}1 \cdot c_B(t) = 0{,}5 \cdot (\frac{4}{5} c_{ges} - c_B(t)$

b) siehe Tabelle
c) siehe Tabelle
d) $c_A(t + 1) - c_A(t) = 0{,}5 \cdot (S_A - c_A(t) \Leftrightarrow S_A - c_A(t + 1) = 0{,}5 \cdot (S_A - c_A(t)) = \ldots = 0{,}5^{t+1} \cdot (S_A - c_A(0))$
mit $S_A = \frac{1}{5} c_{ges}$

$c_B(t + 1) - c_B(t) = 0{,}5 \cdot (S_B - c_B(t) \Leftrightarrow S_B - c_B(t + 1) = 0{,}5 \cdot (S_B - c_B(t)) = \ldots = 0{,}5^{t+1} \cdot (S_B - c_B(0))$
mit $S_B = \frac{4}{5} c_{ges}$

e) $c_A(t) = S_A - 0{,}5^t \cdot (S_A - c_A(0)) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot 0{,}5^t$ und

$c_B(t) = S_B - 0{,}5^t \cdot (S_B - c_B(0)) = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot 0{,}5^t = 1 - c_A(t)$

f) $c_A(t) = S_A - 0{,}5^t \cdot (S_A - c_A(0)) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot 0{,}5^t$ und

$c_B(t) = S_B - 0{,}5^t \cdot (S_B - c_B(0)) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \cdot 0{,}5^t = 1 - c_A(t)$

Tabelle zu b), c) und e), f):

t in Sekunden	c_A in mmol/ml	c_B in mmol/ml	c_A in mmol/ml	c_B in mmol/ml
0	1	0	0	1
1	0,6	0,4	0,1	0,9
2	0,4	0,6	0,15	0,85
3	0,3	0,7	0,175	0,825
4	0,25	0,75	0,1875	0,8125
5	0,225	0,775	0,19375	0,80625
10	$\approx$ 0,2	$\approx$ 0,8	$\approx$ 0,2	$\approx$ 0,8

Aufgabe 11: Beschränktes Wachstum bei der Einstellung eines Verteilungsgleichgewichtes

Als Modellversuch für die Erklärung natürlicher (chemischer oder biologischer) Gleichgewichtszustände verwendet man häufig das Heberohrexperiment: Dazu stehen zwei Messzylinder mit einer Querschnittsfläche von $A = 10$ cm^2 und zwei Heberohre mit $A_L = 0{,}5$ cm^2 und $A_R = 1$ cm^2 zur Verfügung. Man füllt den rechten Meßzylinder bis zur Höhe $h_R(0)$ und den linken Meßzylinder bis zur Höhe $h_L(0)$ mit Wasser. Die Messzylinder enthalten dann die Anfangsmengen $V_R(0) = A \cdot h_R(0)$ und $V_L(0) = A \cdot h_L(0)$. Nun tauscht man mit den Heberohren kreuzweise solange Wasser aus, bis sich die Volumina in den beiden Messzylindern (praktisch) nicht mehr ändern.

Da die Heberohre sich immer genau so hoch wie der Messzylinder füllen, werden beim t-ten Schritt
von rechts nach links $\Delta V_{R\to L}(t) = A_R \cdot h_R(t) = 0{,}1 \cdot A \cdot h_R(t) = 0{,}1 \cdot V_R(t)$ und
von links nach rechts $\Delta V_{L\to R}(t) = A_L \cdot h_L(t) = 0{,}05 \cdot A \cdot h_L(t) = 0{,}05 \cdot V_L(t)$
übertragen.

Die neuen Volumina sind dann
$V_R(t + 1) = V_R(t) + \Delta V_{L\to R}(t) - \Delta V_{R\to L}(t)$ und
$V_L(t + 1) = V_L(t) - \Delta V_{L\to R}(t) + \Delta V_{R\to L}(t)$.

Insgesamt werden $V_0 = 10$ cm^3 Wasser auf die beiden Meßzylinder verteilt, so dass $V_R(t) + V_L(t) = 10$ cm^3 $= V_0$.

a) Zeige, dass gilt

$V_R(t + 1) - V_R(t) = 0{,}15 \cdot (S_R - V_R(t)$ mit $S_R = \frac{1}{3} V_0$ und

$V_L(t + 1) - V_L(t) = 0{,}15 \cdot (S_L - V_R(t)$ mit $S_L = \frac{2}{3} V_0$.

b) Berechne $V_R(1)$, $V_R(2)$ und $V_R(3)$ sowie $V_L(1)$, $V_L(2)$ und $V_L(3)$ für $V_R(0) = 0$ cm^3 und $V_L(0) = 10$ cm^3.

c) Berechne $V_R(1)$, $V_R(2)$ und $V_R(3)$ sowie $V_L(1)$, $V_L(2)$ und $V_L(3)$ für $V_R(0) = 10$ cm^3 und $V_L(0) = 0$ cm^3

d) Zeige, dass

$(S_R - V_R(t)) = (S_R - V_R(0)) \cdot 0{,}85^t$ mit $S_R = \frac{1}{3} V_0$ und

$(S_L - V_L(t)) = (S_L - V_L(0)) \cdot 0{,}85^t$ mit $S_L = \frac{2}{3} V_0$.

e) Skizziere den Verlauf von $V_R(t)$ und $V_L(t)$ für $0 \leq t \leq 30$ und $V_R(0) = 0$ cm^3 sowie $V_L(0) = 10$ cm^3.

f) Skizziere den Verlauf von $V_R(t)$ und $V_L(t)$ für $0 \leq t \leq 30$ und $V_R(0) = 10$ cm^3 sowie $V_L(0) = 0$ cm^3.

g) Berechne die übertragenen Volumina $\Delta V_{R\to L}(t)$ $0{,}10 \cdot V_R(t)$ und $\Delta V_{L\to R}(t) = 0{,}05 \cdot V_L(t)$ für t = 0, 10, 20 und 30 und erkläre anhand dieser Werte, warum sich das Gleichgewicht gerade im Verhältnis $V_R : V_L = 2 : 1$ einstellt.

Lösungen

a) $V_R(t+1) = V_R(t) +$ 👎$V_{L\to R}(t) -$ 👎$V_{R\to L}(t) = V_R(t) + 0{,}05\cdot V_L(t) - 0{,}1\cdot V_R(t) = V_R(t) + 0{,}05\cdot(V_0 - V_R(t)) - 0{,}1\cdot V_R(t) = 0{,}05\ V_0 + (1 - 0{,}15)\cdot V_R(t) \Leftrightarrow V_R(t+1) - V_R(t) = 0{,}05\ V_0 - 0{,}15\ V_R(t) = 0{,}15\cdot(\frac{2}{3} V_0 - V_R(t)$

und

$V_L(t+1) = V_L(t) -$ 👎$V_{L\to R}(t) +$ 👎$V_{R\to L}(t) = V_L(t) - 0{,}05\cdot V_L(t) + 0{,}1\cdot V_R(t) = V_L(t) - 0{,}05\cdot V_L(t) + 0{,}1\cdot(V_0 - V_L(t)) = 0{,}1\ V_0 + (1 - 0{,}15)\cdot V_L(t) \Leftrightarrow V_L(t+1) - V_L(t) = 0{,}1\ V_0 - 0{,}15\ V_L(t) = 0{,}15\cdot(\frac{1}{3} V_0 - V_R(t).$

b) siehe Tabelle

c) siehe Tabelle

d) $\frac{2}{3} V_0 - V_R(t+1) = (1 - 0{,}15)\ (\frac{2}{3} V_0 - V_R(t)) = 0{,}85^{t+1}\cdot(\frac{2}{3} V_0 - V_R(0))$ und

$\frac{1}{3} V_0 - V_L(t+1) = (1 - 0{,}15)\ (\frac{1}{3} V_0 - V_L(t)) = 0{,}85^{t+1}\cdot(\frac{1}{3} V_0 - V_L(0)).$

e) $V_R(t) = \frac{2}{3} V_0 - 0{,}85^t\cdot(\frac{2}{3} V_0 - V_R(0)) = \frac{20}{3} - \frac{20}{3}\cdot 0{,}85^t$ und

$V_L(t) = \frac{1}{3} V_0 - 0{,}85^t\cdot(\frac{1}{3} V_0 - V_L(0)) = \frac{10}{3} + \frac{20}{3}\cdot 0{,}85^t = 10 - V_R(t)$

f) $V_R(t) = \frac{2}{3} V_0 - 0{,}85^t\cdot(\frac{2}{3} V_0 - V_R(0)) = \frac{20}{3} + \frac{10}{3}\cdot 0{,}85^t$ und

$V_L(t) = \frac{1}{3} V_0 - 0{,}85^t\cdot(\frac{1}{3} V_0 - V_L(0)) = \frac{10}{3} - \frac{10}{3}\cdot 0{,}85^t = 10 - V_R(t)$

Tabelle zu b), c) und e), f):

t in Sekunden	$V_R(t)$ in cm^3	$V_L(t)$ in cm^3	$V_R(t)$ in cm^3	$V_L(t)$ in cm^3
0	0	10	10	0
1	1	9	9,5	0,5
2	1,85	8,15	9,07	0,93
3	2,573	7,427	8,71	1,29
4	3,19	6,81	8,41	1,59
5	3,71	6,29	8,15	1,85
10	5,35	4,64	7,32	2,68
20	6,41	3,59	6,80	3,20
30	6,61	3,38	6,70	3,30