4.7. Prüfungsaufgaben zum exponentiellen Wachstum

Aufgabe 1: Zinseszins (4)
Bestimme die fehlende Größe des Sparvertrags:

Anfangskapital	2000,00 €	500,00 €	8000,00 €	
Jahrszinssatz	5,9 %	4,0 %		3,9 %
Laufzeit	15 Jahre		10 Jahre	30 Jahre
Endguthaben		1095,56 €	14876,69 €	630,23 €

Lösungen

Anfangskapital	2000,00 €	500,00 €	8000,00 €	**200,00 €**
Jahrszinssatz	5,9 %	4,0 %	**6,4%**	3,9 %
Laufzeit	15 Jahre	**20 Jahre**	10 Jahre	30 Jahre
Endguthaben	**4725,74 €**	1095,56 €	14876,69 €	630,23 €

Aufgabe 2: Zinseszins (4)
Bestimme die fehlende Größe des Sparvertrags:

Anfangskapital		1000,00 €	5000,00 €	20 000,00 €
Jahrszinssatz	4,2 %		4,4%	3,9 %
Laufzeit	12 Jahre	30 Jahre		18 Jahre
Endguthaben	491,51 €	2427,26 €	7690,86 €	

Lösungen

Anfangskapital	**300,00 €**	1000,00 €	5000,00 €	20 000,00 €
Jahrszinssatz	4,2 %	**3,0 %**	4,4%	3,9 %
Laufzeit	12 Jahre	30 Jahre	**10 Jahre**	18 Jahre
Endguthaben	491,51 €	2427,26 €	7690,86 €	**39820,78 €**

Aufgabe 3: Exponentielles Wachstum (4)
Die Bevölkerung Italiens umfasst zur Zeit B(0) = 50 Mio Menschen und schrumpft jedes Jahr um 2%.

a) Wie hoch ist die Bevölkerung B(t) nach t Jahren? (1)
b) Um wie viel Prozent ändert sich die Bevölkerung alle zehn Jahre? (1)
c) Nach wie vielen Jahren wird die Bevölkerung auf 40 Mio Menschen abgesunken sein? (2)

Lösung

a) $B(t) = 50\cdot 10^6\cdot 0.98^t$. (1)
b) Nach t = 10 Jahren vermindert ich die Bevölkerung um den Faktor $0{,}98^{10} = 0{,}817$, das entspricht einer Abnahme von −18,3 %. (1)
c) $40\cdot 10^6 = 50\cdot 10^6\cdot 0.98^x \Leftrightarrow 4 = 5\cdot 0{,}98^t \Leftrightarrow t = \frac{\log\frac{4}{5}}{\log 0{,}98} = 11{,}04$ Jahre (2)

Aufgabe 4: Exponentielles Wachstum (4)
Eine Bakterienkultur bedeckt eine Fläche von 0,2 cm^3 und vermehrt sich jede Stunde um 5 %.

a) Wie hoch ist die bedeckte Fläche A(t) nach t Stunden? (1)
b) Bestimme die tägliche Zuwachsrate in %. (1)
c) Nach wie vielen Tagen wird eine Fläche von 80 cm^3 bedeckt sein? (2)

Lösung

a) Ansatz $A(t) = A(0)\cdot(1 + \frac{p}{100})^t$. Mit p = 5 und A(0) = 0,2 cm^3 erhält man $A(x) = 0{,}2\ cm^3\cdot 1{,}05^t$. (1)
b) Nach 1 Tag = 24 Stunden vermehrt sich die Fläche um den Faktor $1{,}05^{24} = 3{,}22 \Rightarrow 222$ % Zuwachs pro Tag. (1)
c) $A(t) = 80\ cm^3 \Leftrightarrow 0{,}2\ cm^3\cdot 1{,}05^t = 80\ cm^3 \Leftrightarrow 1{,}05^t = 400 \Leftrightarrow t = \frac{\log 400}{\log 1{,}05} = 122{,}8$ Stunden = 5,1 Tage (2)

Aufgabe 5: Exponentielles Wachstum (7)
In einer „steril“ verpackten Käseportion befinden sich zum Zeitpunkt der Verpackung 5000 Bakterien. Einen Tag später um die gleiche Zeit sind es schon 11000.

a) Bestimme die stündliche Zuwachsrate in %. (2)
b) Nach wieviel Stunden verdoppelt sich der Bestand jeweils? (2)
c) Wie viele Bakterien sind unter der Annahme eines exponentiellen Wachstums eine Woche nach der Verpackung in der Käseportion zu erwarten? (1)
d) Wie viele Bakterien sind nach einer Woche zu erwarten, wenn sich die Vermehrungsrate der Bakterien durch gekühlte Lagerung halbiert hat? (2)

Lösung

a) $B(t) = (1 + \frac{p}{100})^t \cdot B(0)$ mit $B(0) = 5000$, $B(1) = 11000$ und t in Tagen $\Rightarrow B(t) = 2{,}2^t \cdot 5000$. (1)

Nach 1 Stunde = $\frac{1}{24} \cdot$Tag ändert sich B um den Faktor $2{,}2^{1/24} = 1{,}033$, d.h. um 3,3 %. (1)

b) $B(t') = 2 \cdot B(0) \Leftrightarrow 1{,}033^{t'} \cdot 5000 = 2 \cdot 5000 \Leftrightarrow 1{,}033^{t'} = 2 \Leftrightarrow t' = \frac{\log 2}{\log 1{,}033} \approx 21{,}3$ Stunden. (2)

c) $B(7\text{ Tage}) = 2{,}2^7 \cdot 5000 \approx 1{,}24$ Millionen. (1)

d) Aus $1 + \frac{p}{100} = 2{,}2$ folgt p = 120 % pro Tag bei Raumtemperatur. (1)

Im Kühlschrank ist also p’’ = 60 % pro Tag und $B''(7\text{ Tage}) = 1{,}6^7 \cdot 5000 \approx 0{,}13$ Millionen (1)

Aufgabe 6: Exponentielles Wachstum (7)
In einer „steril“ verpackten Käsepackung wurden vier Wochen nach Verpackungsdatum 7,2 Millionen Bakterien pro Gramm und einen Tag später 7,9 Millionen Bakterien pro Gramm nachgewiesen.

a) Bestimme die tägliche Zuwachsrate in %. (2)
b) Wieviele Bakterien waren unter der Annahme eines exponentiellen Wachstums bei der Verpackung in die Käseportion gelangt? (1)
c) Wieviele Bakterien wären nach acht Wochen zu erwarten? (1)
d) Nach wieviel Tagen verdoppelt sich der Bestand jeweils? (2)
e) Bestimme die wöchentliche Zuwachsrate in % (1)

Lösung

a) $Z(t) = (1 + \frac{p}{100})^t \cdot Z(0)$ mit $Z(28) = 7{,}2$ Millionen und $Z(29) = 7{,}9$ Millionen (1)

$\Rightarrow Z(t) \approx 1{,}0972^t \cdot 0{,}54$ Millionen $\Rightarrow p = 9{,}72$ % (1)

b) $Z(0) \approx 0{,}54$ Millionen (1)
c) $Z(56) \approx 1{,}0972^{56} \cdot 0{,}54$ Millionen = 96,4 Millionen (1)
d) $Z(t) = 2 \cdot Z(0) \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}0972} \approx 7{,}48$ Tage (2)
e) Nach einer Woche = t Tage ändert sich der Bestand um den Faktor $1{,}0972^7$= 1.814, d.h. um 81,4 % (1)

Aufgabe 7: Exponentielles Wachstum (7)
Auf eine Südatlantikinsel wurde im Jahr 1695 eine unbekannte Zahl von Ziegen ausgesetzt. Im Jahr 1705 zählte man 25 Ziegen und zwei Jahre später 36 Ziegen.

a) Bestimme die jährliche Zuwachsrate in %. (2)
b) Wieviele Ziegen waren im Jahr 1695 ausgesetzt worden, wenn man exponentielles Wachstum voraussetzt? (1)
c) Wieviele Ziegen wären im Jahr 1710 zu erwarten? (1)
d) Bestimme die monatliche Zuwachsrate in % (1)
e) Nach wievielen Monaten verdoppelte sich der Bestand jeweils? (2)

Lösung

a) $Z(t) = (1 + \frac{p}{100})^t \cdot Z(0)$ mit $Z(10) = 25$ und $Z(12) = 36 \Rightarrow Z(t) = 1{,}2^t \cdot 4 \Rightarrow p = 20\ \%$. (2)

b) $Z(0) = 4$ (1)

c) $Z(15) = 1{,}2^{15} \cdot 4 = 61{,}6 \approx 62$ Ziegen (1)

d) Nach 1 Monat = $\frac{1}{12}$ Jahre ändert sich der Bestand um den Faktor $1{,}2^{1/12} = 1{,}0153$, d.h., um 1,53 % (1)

e) $Z(t') = 2 \cdot Z(0) \Rightarrow t' = \frac{\log 2}{\log 1{,}0153} = 45{,}6$ Monate (2)

Aufgabe 8: Exponentielle Abnahme (6)

Der Luftdruck p wird in Hektopascal (hPa) gemessen. Aus Messungen ist bekannt, dass er exponentiell mit der Höhe abnimmt, und zwar um durchschnittlich 12% pro Kilometer Höhenzunahme. Am 12. Februar 1999 betrug der Luftdruck auf Meereshöhe 1000 hPa.

a) Gib eine Funktion an, mit der man an diesem Tag für die Höhe h (in km) über dem Meeresspiegel den Luftdruck p (in hPa) berechnen kann.

b) Wie groß war an diesem Tag der Luftdruck in 4500 m Höhe über dem Meeresspiegel?

c) Um wie viel Prozent hat der Druck gegenüber dem Wert auf Meereshöhe abgenommen?

d) In welcher Höhe registrierte damals ein Wetterballon einen Luftdruck von 400 hPa?

Lösung:

a) $p(h) = (1 - \frac{12}{100})^h \cdot p(0) = 0{,}88^h \cdot 1000$ hPa mit h in Kilometern. (2)

b) $p(4{,}5) = 562{,}6$ hPa (1)

c) Abnahme um $\frac{1000 - 562{,}6}{1000} = 43{,}7\ \%$ (1)

d) 400 hPa = p(h) $\Leftrightarrow 400 = 0{,}88^h \cdot 1000 \Leftrightarrow h = \frac{\ln 0{,}4}{\ln 0{,}88} \approx 7{,}16$ km (2)

Aufgabe 9: Exponentielle Abnahme bei Verdünnung (8)

Ein Bauer kippt 1 m^3 Gülle mit einer Bakterienkonzentration von 10^9 Clostridien pro Liter in einen Bergsee mit 10^7 m^3 reinem Schmelzwasser. Jede Sekunde werden aus dem Gletscherbach 1 m^3 frisches Wasser zugeführt und durch den Abfluss 1 m^3 verschmutztes Wasser abgeführt.

a) Berechnen Sie die anfängliche Bakterienkonzentration c(0) im See unter Annahme, dass sich die Clostridien schlagartig gleichmässig auf den ganzen See verteilt haben.

b) Wie viel Prozent der Clostridien werden durch den Abfluss pro Tag abgeführt?

c) Wie hoch ist die Bakterienkonzentration nach drei Wochen?

d) Nach wie vielen Tagen ist die Bakterienkonzentration auf die Hälfte des Anfangswertes gesunken?

Lösungen:

a) $c(0) = \frac{10^{12}\ \text{Clostridien}}{10^7\ \text{m}^3} = 10^5$ Clostridien pro m^3 = 100 Clostridien pro Liter (1)

b) Pro Tag werden $\frac{1\ \text{m}^3}{\text{s}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{\text{h}} \cdot \frac{24\ \text{h}}{\text{d}} = 86400\ \frac{\text{m}^3}{\text{d}}$ von insgesamt 10^7 m^3 Wasser ausgetauscht. (1)

Das entspricht einem Anteil von $\frac{86\,400\ \text{m}^3}{\text{d} \cdot 10^7\ \text{m}^3} \cdot 100 = 0{,}864\ \%$ pro Tag. (1)

Da die Bakterien gleichmässig auf das Wasser verteilt sind, ist dies auch der prozentuale Anteil der abgeführten Bakterien pro Tag. (1)

c) $c(21) = \left(1 - \frac{0{,}876}{100}\right)^{21} \cdot c(0) = 0{,}99136^{21} \cdot 100$ Clostridien pro Liter = 83,34 Clostridien pro Liter (2)

d) $c(t_{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot c(0) \Leftrightarrow 0{,}99136^{t1/2} = 0{,}5 \Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}99136)} \approx 79{,}88$ Tage, also nach 80 Tagen. (2)

Aufgabe 10: Zinseszins (2)
Eine maschinelle Anlage wurde drei Jahre hintereinander mit 12,5 % vom Restwert abgeschrieben. Nach der dritten Abschreibung beträgt der Restwert 85 750 €. Berechnen Sie den Anschaffungswert!

Lösung

$85\,750\text{ €} = B(0)\cdot 0{,}875^3 \Rightarrow B(0) = 128\,000\text{ €}$

Aufgabe 11: Bevölkerungswachstum (2)
Die Einwohnerzahl einer Stadt nahm in den letzten drei Jahren durchschnittlich um 5 % jährlich zu und beträgt heute 92 610. Wie groß war die Einwohnerzahl vor drei Jahren?

Lösung

$92\,610 = B(0)\cdot 1{,}05^3 \Rightarrow B(0) = 80\,000$ Einwohner

Aufgabe 12: Temperaturausgleich (5) (→ beschränktes Wachstum)
Eine 85 °C heisse Tasse Tee hat in einem 20 °C warmen Raum nach 2 Minuten nur noch eine Temperatur von 73,2 °C.

a) Geben Sie die Gleichung an, mit der man die Temperatur T des Tees in °C zur Zeit t in Minuten nach der ersten Messung berechnen kann. (2)
b) Welche Temperatur hat der Tee nach 10 Minuten? (1)
c) Nach wie vielen Minuten hat der Tee eine Temperatur von 40 °C ? (2)

Lösungen:

a) Ansatz: Die Temperaturdifferenz ΔT zur Umgebung nimmt exponentiell ab mit $\Delta T(t) = \Delta T(0)\cdot a^t$ mit t in Minuten. Mit $\Delta T(0) = 65\text{ °C}$ und $\Delta T(2) = 53{,}2\text{ °C}$ ergibt sich $53{,}2\text{ °C} = 65\text{ °C}\cdot a^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{53{,}2}{65}} \approx 0{,}904 \Rightarrow \Delta T(t) = 65\text{ °C}\cdot 0{,}904^t$ und $T(t) = \Delta T(t) + 20\text{°C}$. (2)

b) $T(10) = 65\text{°C}\cdot 0{,}904^{10} + 20\text{°C} \approx 43{,}87\text{ °C}$ (1)

c) $\Delta T(t) = 20\text{ °C} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{20}{65}\right)}{\ln(0{,}904)} \approx 11{,}68$ Minuten (2)

Aufgabe 13 (8)
Ein Waldstück war im Jahr 2000 völlig gesund. Im Jahr 2002 waren aber schon 3600 Bäume und im Jahr 2005 sogar 6723 Bäume vom Borkenkäfer befallen.

a) Man nimmt an, dass jedes Jahr der gleiche prozentuale Anteil bisher gesunder Bäume neu befallen wird. Berechne die Gesamtzahl der Bäume im Waldstück und die prozentuale Ansteckungsrate. (3)
b) Berechne die Zahl der voraussichtlich befallenen Bäume im Jahr 2020 (1)
c) In welchem Jahr wären 90 % aller Bäume befallen? (2)
d) Skizziere die zeitliche Entwicklung des kranken Baumbestandes bis zum Jahr 2020 in einem Schaubild für den kommunalen Waldbesitzer. (2)

Aufgabe 13 (8)

a) Die Zahl der im Jahr 2000 + t noch nicht geschädigten Bäume ist $B(t) = B(0)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ mit $B(2) = 5400$ und $B(5) = 3277$. Durch Einsetzen erhält man $B(t) = 10\,000\cdot 0{,}8^t$. Zu Im Jahr 2000 waren es also 10 000 gesunde Bäume und jedes Jahr werden 20 % der bisher gesunden Bäume neu befallen. (3)

b) $B(20) = 9885$. (1)

c) $B(t) = 0{,}1\cdot B(0) \Rightarrow 10\,000\cdot 0{,}8^t = 0{,}1\cdot 10\,000 \Rightarrow t = \frac{\log 0{,}1}{\log 0{,}8} \approx 10{,}3$ Jahre (2)

d) Zusätzliche Werte: $B(0) = 0$; $B(1) = 2000$; $B(2) = 3600$; $B(3) = 4880$; $B(4) = 5904$; $B(5) = 6723$; $B(10) = 8926$ (2)

Aufgabe 14a (10)

a) Bestimme die Halbwertszeit eines radioaktiven Präparates, dessen Masse jedes Jahr um 1,718 % abnimmt.
b) Bestimme die Verdopplungszeit einer Blaualgenkolonie, deren Bestand jede Stunde um 1 % zunimmt.

Lösungen

a) **Ansatz** $f(t) = f(0) \cdot a^t$ (1)

Gegeben: $a = \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \left(1 + \frac{-1{,}718}{100}\right) = 0{,}9828$ (1)

Gesucht: Halbwertszeit $T_{0,5}$ mit $0{,}5 \cdot f(0) = f(0) \cdot 0{,}9828^{T_{0,5}} \overset{:f(0)}{\Longrightarrow} 0{,}5 = 0{,}9828^{T_{0,5}} \overset{log}{\Rightarrow} T_{0,5} = \frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}9828)} \approx 40$ (2)

Antwort: Die Halbwertszeit beträgt ca. 40 Jahre. (1)

b) **Ansatz** $f(t) = f(0) \cdot a^t$ (1)

Gegeben: $a = \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \left(1 + \frac{1}{100}\right) = 1{,}01$ (2)

Gesucht: Verdopplungszeit T_2 mit $2 \cdot f(0) = f(0) \cdot 1{,}01^{T_2} \overset{:f(0)}{\Longrightarrow} 2 = 1{,}01^{T_2} \overset{log}{\Rightarrow} T_2 = \frac{\log(2)}{\log(1{,}01)} \approx 70$ (1)

Antwort: Die Verdopplungszeit beträgt ca. 70 Stunden. (1)

Aufgabe 14b (10)

a) Bestimme die Halbwertszeit eines radioaktiven Präparates, dessen Masse jedes Jahr um 3,4 % abnimmt.

b) Bestimme die Verdopplungszeit einer Blaualgenkolonie, deren Bestand jeden Tag um 2,81 % zunimmt.

Lösungen

a) **Ansatz** $f(t) = f(0) \cdot a^t$ (1)

Gegeben: $a = \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \left(1 + \frac{-3{,}4}{100}\right) = 0{,}966$ (1)

Gesucht: Halbwertszeit $T_{0,5}$ mit $0{,}5 \cdot f(0) = f(0) \cdot 0{,}966^{T_{0,5}} \overset{:f(0)}{\Longrightarrow} 0{,}5 = 0{,}966^{T_{0,5}} \overset{log}{\Rightarrow} T_{0,5} = \frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}966)} \approx 20$ (2)

Antwort: Die Halbwertszeit beträgt ca. 20 Jahre. (1)

b) **Ansatz** $f(t) = f(0) \cdot a^t$ (1)

Gegeben: $a = \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \left(1 + \frac{12{,}81}{100}\right) = 1{,}0281$ (1)

Gesucht: Verdopplungszeit T_2 mit $2 \cdot f(0) = f(0) \cdot 1{,}0281^{T_2} \overset{:f(0)}{\Longrightarrow} 2 = 1{,}0281^{T_2} \overset{log}{\Rightarrow} T_2 = \frac{\log(2)}{\log(1{,}0281)} \approx 25$ (2)

Antwort: Die Verdopplungszeit beträgt ca. 25 Tage. (1)

Aufgabe 15a (10)

a) Ein radioaktives Präparat zerfällt mit einer Halbwertszeit von 150 Jahren. Um wie viel Prozent hat die Masse nach 20 Jahren abgenommen?

b) Eine Kaninchenkolonie vermehrt sich exponentiell, so dass sich ihr Bestand alle 50 Tage verdoppelt. Um wie viel Prozent hat der Bestand nach 10 Tagen zugenommen?

Lösungen

a) **Ansatz** $f(t) = f(0) \cdot a^t$ (1)

Gegeben: $f(150) = 0{,}5 \cdot f(0) \overset{Einsetzen}{\Longleftrightarrow} f(0) \cdot a^{150} = 0{,}5 \cdot f(0) \overset{:f(0)}{\Longleftrightarrow} a^{150} = 0{,}5 \overset{\sqrt[150]{\ }}{\Longleftrightarrow} a = \sqrt[150]{0{,}5} \approx 0{,}9954$ (2)

Gesucht: $f(20) = f(0) \cdot 0{,}9954^{20} \approx f(0) \cdot 0{,}9117$ (1)

Antwort: Der Bestand hat um ca. 8,83 % abgenommen. (1)

b) **Ansatz** $f(t) = f(0) \cdot a^t$ (1)

Gegeben: $f(50) = 2 \cdot f(0) \overset{Einsetzen}{\Longleftrightarrow} f(0) \cdot a^{50} = 2 \cdot f(0) \overset{:f(0)}{\Longleftrightarrow} a^{50} = 2 \overset{\sqrt[50]{\ }}{\Longleftrightarrow} a = \sqrt[50]{2} \approx 1{,}014$ (2)

Gesucht: $f(10) = f(0) \cdot 1{,}014^{10} \approx f(0) \cdot 1{,}149$ (1)

Antwort: Der Bestand hat um ca. 14,9 % zugenommen. (1)

Aufgabe 15b (10)

a) Bestimme die Halbwertszeit eines radioaktiven Präparates, dessen Masse jedes Jahr um 1,96 % abnimmt.

b) Eine Kaninchenkolonie vermehrt sich exponentiell, so dass sich ihr Bestand alle 60 Tage verdoppelt. Um wie viel Prozent hat der Bestand nach 10 Tagen zugenommen?

Lösungen

a) **Ansatz** $f(t) = f(0) \cdot a^t$ (1)

Gegeben: $a = \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \left(1 + \frac{-1{,}96}{100}\right) = 0{,}9804$ (1)

Gesucht: Halbwertszeit $T_{0,5}$ mit $0{,}5 \cdot f(0) = f(0) \cdot 0{,}9804^{T_{0,5}} \overset{:f(0)}{\Longrightarrow} 0{,}5 = 0{,}9804^{T_{0,5}} \overset{log}{\Rightarrow} T_{0,5} = \frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}9804)} \approx 35$ (2)

Antwort: Die Halbwertszeit beträgt ca. 35 Jahre. (1)

b) **Ansatz** $f(t) = f(0) \cdot a^t$ (1)

Gegeben: $f(50) = 2 \cdot f(0) \xLeftrightarrow{Einsetzen} f(0) \cdot a^{60} = 2 \cdot f(0) \xLeftrightarrow{:f(0)} a^{60} = 2 \xLeftrightarrow{\sqrt[60]{\,}} a = \sqrt[60]{2} \approx 1{,}0116$ (2)

Gesucht: $f(10) = f(0) \cdot 1{,}01116^{10} \approx f(0) \cdot 1{,}122$ (1)

Antwort: Der Bestand hat um ca. 11,2 % zugenommen. (1)