4.7. Prüfungsaufgaben zum logistischen Wachstum

Aufgabe 1: Logistisches Wachstum (5)
Die unten stehende Tabelle gibt die Zahl der neu eingewanderten Waschbären in einem abgelegenen Waldgebiet in Ostdeutschland an.

a) Berechne die Änderungsrate q und die Sättigungsgrenze S unter der Annahme, dass es sich um ein logistisches Wachstum handelt.
b) Nach wie vielen Jahren haben die Tiere das Waldstück vollständig besiedelt?
c) Begründe, warum die Zahl der Tiere zunächst annähernd exponentiell und später eher beschränkt wächst.

Jahr	2000	2001	2002
Zahl der Waschbären	20	30	44

Lösung

a) $30 = 20 + q\cdot 20\cdot(S - 20)$ und $44 = 30 + q\cdot 30\cdot(S - 30)$. Durch Gleichsetzen oder Einsetzen erhält man $q = \frac{1}{300}$ und $S \approx 170$.
b) $B(12) = 169{,}55 \Rightarrow$ nach 12 Jahren ist die Sättigungsgrenze erreicht.
c) Das Wachstum wird zunächst nur durch die Zahl der fortpflanzungsfähigen Tiere bestimmt: Die Änderungsrate ist proportional zum Bestand. Mit zunehmender Bevölkerung des Waldgebietes wird das Wachstum immer mehr durch dien noch zur Verfügung stehenden Platz bestimmt: Die Änderungsrate ist proportional zu den noch nicht besetzten Ressourcen bzw. zum Sättigungsmanko.

Aufgabe 2: Logistisches Wachstum (5)
Die unten stehende Tabelle gibt die von einer frisch angesetzten Pilzkultur in einer Petrischale besiedelte Fläche an.

a) Berechne den Flächeninhalt der Petrischale unter der Annahme, dass es sich um ein logistisches Wachstum handelt.
b) Nach wie vielen Jahren hat der Pilz die Petrischale bis auf den letzten Quadratmillimeter besiedelt?
c) Begründe, warum der Pilz zunächst annähernd exponentiell und später eher beschränkt wächst.

Tag	0	1	4	5
Besiedelt Fläche in cm^2	1	1,6	5,9	8,5

Lösung

a) $1{,}6 = 1 + q\cdot 1\cdot(S - 1)$ und $8{,}5 = 5{,}9 + q\cdot 5{,}9\cdot(S - 5{,}9)$. Durch Gleichsetzen oder Einsetzen erhält man $q \approx 0{,}327$ und $S \approx 19{,}46\ cm^2$. Die Petrischale hat also eine Fläche von $19{,}46\ cm^2$.
b) $B(16) = 19{,}459 \Rightarrow$ nach 16 Tagen ist nur noch ein Quadratmillimeter frei.
c) Das Wachstum wird zunächst nur durch die Zahl der Micellen bestimmt: Die Änderungsrate ist proportional zum Bestand. Mit zunehmender Bevölkerung der Petrischale wird das Wachstum immer mehr durch dien noch zur Verfügung stehenden Platz bestimmt: Die Änderungsrate ist proportional zu den noch nicht besetzten Ressourcen bzw. zum Sättigungsmanko.

Aufgabe 3: Logistisches Wachstum (5)
Im Jahr 1834 wurden auf einer einsamen Pazifikinsel 10 Hasen freigesetzt. Im darauf folgenden Jahr wurden schon 14 gezählt und im Jahr 1836 waren es 19.

a) Berechne die Änderungsrate q und die Sättigungsgrenze S unter der Annahme, dass es sich um ein logistisches Wachstum handelt.
b) Nach wie vielen Jahren haben die Tiere die Insel vollständig besiedelt?
c) Begründe, warum die Zahl der Tiere zunächst annähernd exponentiell und später eher beschränkt wächst.

Lösung

a) $14 = 10 + q\cdot 10\cdot(S - 10)$ und $19 = 14 + q\cdot 14\cdot(S - 14)$. Durch Gleichsetzen oder Einsetzen erhält man $q = \frac{3}{280}$ und $S \approx 47{,}3$.
b) $B(10) \approx 46{,}80$ und $B(11) \approx 47{,}07 \Rightarrow$ nach 11 Jahren ist die Insel vollständig besiedelt.
c) Das Wachstum wird zunächst nur durch die Zahl der fortpflanzungsfähigen Tiere bestimmt: Die Änderungsrate ist proportional zum Bestand. Mit zunehmender Bevölkerung der Insel wird das Wachstum immer mehr durch dien noch zur Verfügung stehenden Platz bestimmt: Die Änderungsrate ist proportional zu den noch nicht besetzten Ressourcen bzw. zum Sättigungsmanko.

Aufgabe 4: Logistisches Wachstum (5)
Im Jahr 1835 wurden auf einer einsamen Atlantikinsel 11 Hausschweine freigesetzt. Im darauf folgenden Jahr wurden schon 15 gezählt und im Jahr 1837 waren es 20.

a) Berechne die Änderungsrate q und die Sättigungsgrenze S unter der Annahme, dass es sich um ein logistisches Wachstum handelt.
b) Nach wie vielen Jahren haben die Tiere die Insel vollständig besiedelt?
c) Begründe, warum die Zahl der Tiere zunächst annähernd exponentiell und später eher beschränkt wächst.

Lösung

a) $15 = 11 + q\cdot 11\cdot(S - 11)$ und $20 = 15 + q\cdot 15\cdot(S - 15)$. Durch Gleichsetzen oder Einsetzen erhält man $q = \frac{1}{132}$ und $S = 59$.
b) $B(12) \approx 58{,}36$ und $B(13) \approx 58{,}64 \Rightarrow$ nach 13 Jahren ist die Insel vollständig besiedelt.
c) Das Wachstum wird zunächst nur durch die Zahl der fortpflanzungsfähigen Tiere bestimmt: Die Änderungsrate ist proportional zum Bestand. Mit zunehmender Bevölkerung der Insel wird das Wachstum immer mehr durch dien noch zur Verfügung stehenden Platz bestimmt: Die Änderungsrate ist proportional zu den noch nicht besetzten Ressourcen bzw. zum Sättigungsmanko.

Aufgabe 6: Exponentielles und logistisches Wachstum im Vergleich (8)
Im Jahr 1950 betrug die Weltbevölkerung etwa 2,47 Milliarden Menschen, im Jahr 1960 waren es etwa 3,03 Milliarden.

a) Berechne die Weltbevölkerungszahl in den Jahren 1970, 1980 und 2150 unter der Annahme, dass es sich um exponentielles Wachstum handelt. (3)
b) In welchem Zeitraum würde sich die Bevölkerungszahl nach diesem Modell verdoppeln ? (2)

Tatsächlich hat sich die Weltbevölkerung folgendermaßen entwickelt:

Jahr	1970	1980	1990
Bevölkerungszahl in Milliarden	3,68	4,42	5,30

Für die Prognose der künftigen Entwicklung der Weltbevölkerung geht man bei der UNO davon aus, dass es sich ab dem Jahr 1980 um logistisches Wachstum handelt mit einer Sättigungsgrenze von 11,60 Milliarden.

c) Berechne die Bevölkerungszahl im Jahr 2010 nach dieser Annahme. (3)

Lösung:

a) Ansatz $B(t) = (1 + \frac{p}{100})^t\cdot B(0)$ mit t in Jahrzehnten nach 1950 und $B(0) = 2{,}47$ Mill und $B(1) = 3{,}03$ Mill
$\Rightarrow p = 22{,}7$ % pro Jahrzehnt $\Rightarrow B(t) = 1{,}227^t\cdot 2{,}47$ Mill mit t in Jahrzehnten nach 1950.
$B(2) = 1{,}227^2\cdot 3{,}07$ Mill = 3,71 Mill für 1970 (1)
$B(3) = 1{,}227^3\cdot 3{,}07$ Mill = 4,56 Mill für 1980 (1)
$B(20) = 1{,}227^{20}\cdot 3{,}07$ Mill = 147,10 Mill für 2150 (1)
b) Verdopplungszeit $t = \frac{\log 2}{\log 1{,}227} \approx 3{,}39$ Jahrzehnte = 33,9 Jahre. (2)
c) Ansatz $5{,}30 = 4{,}46 + k\cdot 4{,}42\cdot(11{,}6 - 4{,}42) \Rightarrow k = 0{,}027$ (1)
$\Rightarrow B(2) = 6{,}20$ im Jahr 2000 (1)
$\Rightarrow B(3) = 7{,}10$ im Jahr 2010 (1)

Aufgabe 7: Exponentielles und logistisches Wachstum im Vergleich (8)
Die untenstehende Tabelle zeigt das Anwachsen der Weltbevölkerung in den letzten Jahrzehnten. Das sehr starke Wachstum vor allem im 19. und beginnenden 20. Jahrhundert ließ sich gut mit dem Gesetz des exponentiellen Wachstums beschreiben.

a) Bestimme unter dieser Annahme aus den Angaben für die Jahre 1960 und 1970 das Wachstumsgesetz. (1)
b) Wie hoch würde demnach die Bevölkerungszahl im Jahr 2010 sein? (1)
c) In welchem Zeitraum würde sich die Bevölkerungszahl verdoppeln? (2)

Jahr	1960	1970	1980	1990	2000
Bevölkerungszahl in Milliarden	3,07	3,70	4,46	5,28	6,07

Die Tabelle zeigt, dass die Entwicklung der Weltbevölkerung in den letzten beiden Jahrzehnten nicht mehr exponentiell zunimmt. Prognosen besagen, dass die Weltbevölkerung langfristig einem logistischen Wachstumsgesetz mit einer Sättigungsgrenze von 9 Milliarden Menschen gehorchen wird.

d) Bestätige, dass die Daten der Tabelle von 1980 an ein solches Gesetz erfüllen. (2)
e) Auf welchen Wert wird die Bevölkerungszahl demnach bis zum Jahr 2020 anwachsen? (2)

Lösung
Teil 1

a) Ansatz $B(t) = (1 + \frac{p}{100})^t \cdot B(0)$ mit t in Jahrzehnten nach 1960 und B(0) = 3,07 Mill und B(1) = 3,70 Mill

$\Rightarrow$ p = 20,5 % pro Jahrzehnt (oder p' = 1,88 % pro Jahr) $\Rightarrow B(t) = 1{,}205^t \cdot 3{,}07$ Mill (1)

b) $B(5) = 1{,}205^5 \cdot 3{,}07$ Mill = 7,81 Mill (1)

c) Verdopplungszeit $t = \frac{\log 2}{\log 1{,}205} \approx 3{,}72$ Jahrzehnte = 37,2 Jahre. (2)

d) $5{,}28 = 4{,}46 + k \cdot 4{,}46 \cdot (9 - 4{,}46) \Rightarrow k = 0{,}04$ (1)

$\Rightarrow$ B(0) = 4,46, B(1) = 5,28, B(2) = 6,07 (1)

e) B(3) = 6,76 und B(4) = 7,37 Milliarden im Jahr 2020 (2)

Aufgabe 8: Logistisches Wachstum bei Schafen und Ziegen, die um Futter konkurrieren

Auf einer Insel ohne Raubtiere, die Nahrung für 100 Schafe und 160 Ziegen bietet, werden s(0) = 10 Schafe und z(0) = 4 Ziegen ausgesetzt. Obwohl sich Schafe schneller vermehren als Ziegen, sind nach einigen Jahren mehr Ziegen als Schafe auf der Insel vorhanden. Nach genauerer Untersuchung ergaben sich für die Zahlen s(n) der Schafe und z(n) der Ziegen nach n Monaten die folgenden Zusammenhänge:

$s(n + 1) = s(n) + 0{,}03 \cdot s(n) \cdot (100 - (s(n) + z(n))$
$z(n + 1) = z(n) + 0{,}02 \cdot z(n) \cdot (160 - (s(n) + z(n))$

a) Erkläre, durch welche Annahmen sich die beiden Formeln rechtfertigen lassen und gib die Bedeutung der Zahlen an.
b) Berechne s(n) und z(n) für $0 \leq n \leq 5$ und trage die Werte in die nebenstehende Tabelle ein.
c) Skizziere den Verlauf der beiden Populationen in einem gemeinsamen Schaubild.
d) Begründe anhand der Formel und des Schaubildes, ab wann und warum die Zahl der Schafe wieder zurückgeht.

n	s(n)	z(n)
0		
1		
2		
3		
4		
5		
10	50,4	33,7
15	52,4	60,7
20	38,6	89,5
25	23,0	116,6
30	11,4	137,2
35	5,0	149,6
40	2,0	157,7
45	0,8	158,3
50	0,3	159,4

Lösung

a) Der Zuwachs ist proportional zu Anzahl s(n) bzw. z(n) der vorhandenen Tiere, aber auch zum Sättigungsmanko 100 − (s(n) + z(n) bzw. 160 − (s(n) + z(n), d.h. zu den Futterreserven. Der Vermehrungsfaktor ist bei den Schafen (k = 0,03) größer als bei den Ziegen (k = 0,02).
b) Siehe Tabelle.
c) (klar)
d) Die Schafe erreichen aufgrund ihrer erhöhten Ansprüche zuerst die Sättigungsgrenze. Da die Ziegenpopulation aber weiter anwächst, nimmt die Schafpopulation im folgenden wieder ab: das Sättigungsmanko 100 − (s(n) + z(n) wird negativ, sobald s(n) + z(n) > 100

n	s(n)	z(n)
0	10	4
1	12,6	5,2
2	15,7	6,6
3	19,3	8,5
4	23,5	10,7
5	28,2	13,4
10	50,4	33,7
15	52,4	60,7
20	38,6	89,5
25	23,0	116,6
30	11,4	137,2
35	5,0	149,6
40	2,0	157,7
45	0,8	158,3
50	0,3	159,4