4.7. Exponential- und Logarithmusfunktionen

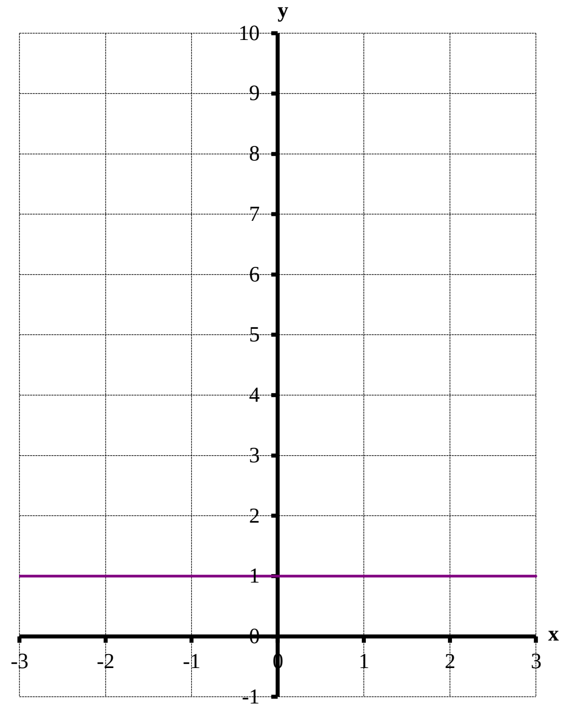
4.7.1. Exponentialfunktionen

Definition:

Die Funktion $y = a^x$ mit der ______ $a \neq 1$ heißt **Exponentialfunktion**. Für die Basis $a = e$ mit der ____________________ **Zahl** e = ________ heißt sie ____________ **Exponentialfunktion** und wird auch $y = e^x = \exp(x)$ geschrieben.

Beispiele:

x	$\left(\frac{1}{10}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	2^x	3^x	10^x
-3						
-2						
-1						
0						
1						
2						
3						



Eigenschaften der Exponentialfunktionen

- **Wertebereich**:
- **Waagrechte Asymptoten:** $a^x \to \_\_ \begin{cases} \text{für } x \to +\infty, \text{ falls } a \_\_\_\_ \\ \text{für } x \to -\infty, \text{ falls } a \_\_\_\_ \end{cases}$
- **Symmetrie:** Spiegelt man den Graphen von $y = a^x$ an der ___-Achse, so erhält man den Graphen von $y =$ ____
- **Gemeinsamer Punkt:** Die Graphen aller Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt _______
- **Wachstum**: Jede Exponentialfunktion wächst schließlich stärker als alle ____________________ !

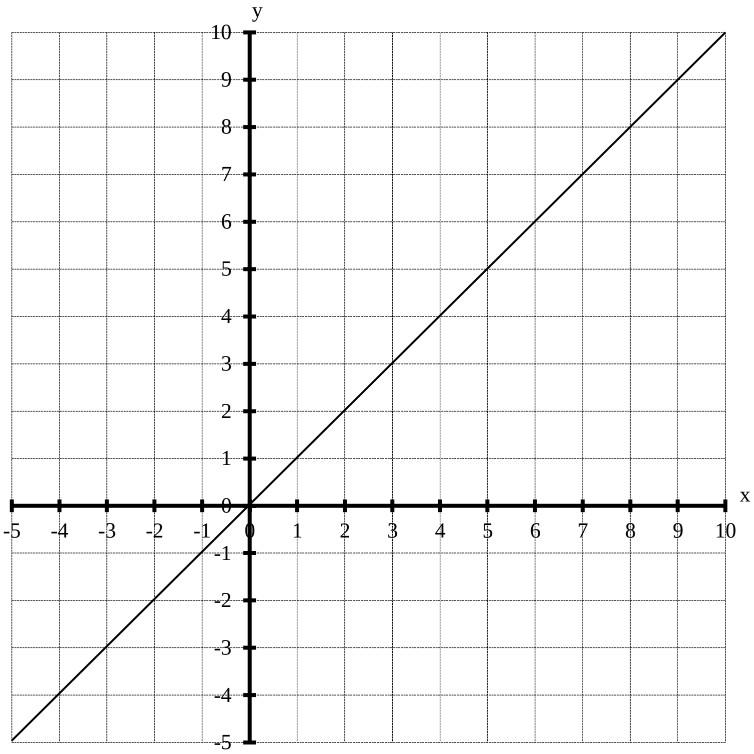
4.7.2. Logarithmusfunktionen

Definition:

Die Funktion $y = \log_a(x)$ mit der ______ $a \neq 1$ heißt **Logarithmusfunktion**. Für die Basis $a = e$ mit der ____________________ **Zahl** e = ________ heißt sie ____________ **Logarithmusfunktion** und wird auch als **logarithmus naturalis** $\ln(x) = \log_e(x)$ bezeichnet

Beispiele:

x	$\log_{10}(x)$	x	$\ln(x)$	x	$\log_2(x)$
$\frac{1}{1000}$		$\frac{1}{e^3}$		$\frac{1}{8}$	
$\frac{1}{100}$		$\frac{1}{e^2}$		$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{e}$		$\frac{1}{2}$	
1		1		1	
10		e		2	
100		e^2		4	
1000		e^3		8	



Eigenschaften:

$y = \log_a(x)$ ist die __________________ zu $y = a^x$, d.h., man erhält

- ihren **Graphen** aus dem Graphen von $y = a^x$ durch _________________ an der 1. Winkelhalbierenden
- ihre **Funktionsgleichung** aus der Gleichung $y = a^x$ durch ____________ nach x und ________________ von x und y.

Insbesondere gilt:

- Die negative y-Achse ist senkrechte __________________
- Alle Graphen gehen durch den Punkt _____

Übungen: Aufgaben zu exponentiellen Änderungen Nr. 4 und 5

4.7.3. Lineare Änderungen (siehe auch 4.1.)

1. Ein Bestand b ändert sich **linear**, wenn nach t Zeitschritten gilt $b(t) = b(0) + d \cdot t$ mit der konstanten **Änderung** d und dem **Anfangswert** b(0).

2. Seine **Änderung** erfolgt immer um den gleichen ___________:

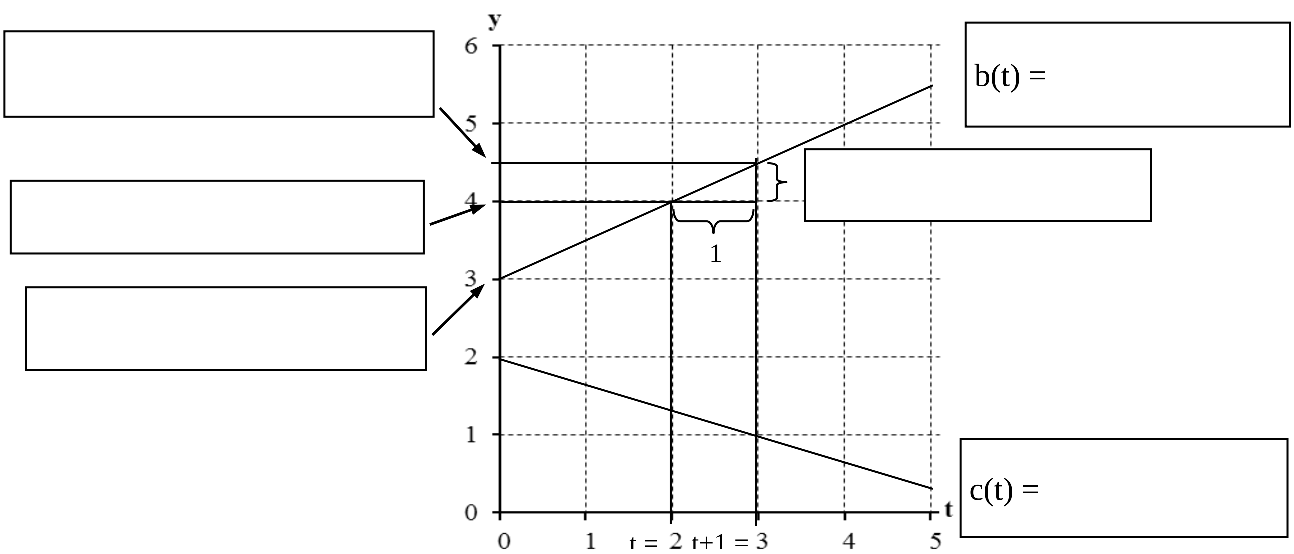
   $b(t+1) = b(0) + d \cdot (t+1)$

   $= b(0) + d \cdot t +$ ___

   $= \quad b(t) +$ ____

3. Für $d > 0$ nimmt der Bestand ____ und für $d < 0$ nimmt er _____.

4. Sein **Graph** ist eine ___________ mit der **Steigung** ___ und dem **y-Achsenabschnitt** ____.



4.7.4. Exponentielle Änderungen

1. Ein Bestand b ändert sich **exponentiell**, wenn nach t Zeitschritten gilt $b(t) = b(0)\cdot k^t$ mit dem _______________ k und dem ______________________ b(0).

2. Für **k > 1** nimmt der Bestand ____ und für **k < 1** nimmt er ____.

3. Seine **Änderung** erfolgt immer um den gleichen _________________ :

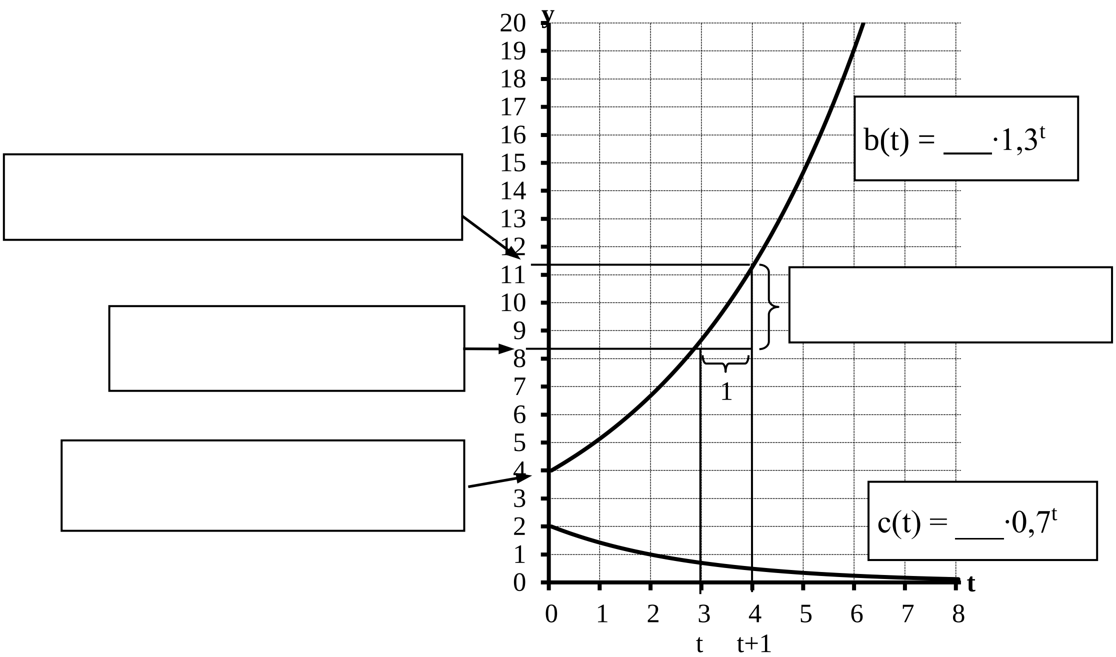
   $b(t + 1) = b(0)\cdot k^{t+1}$

   $= b(0)\cdot k^t\cdot$___

   $=$ b(t)·____.

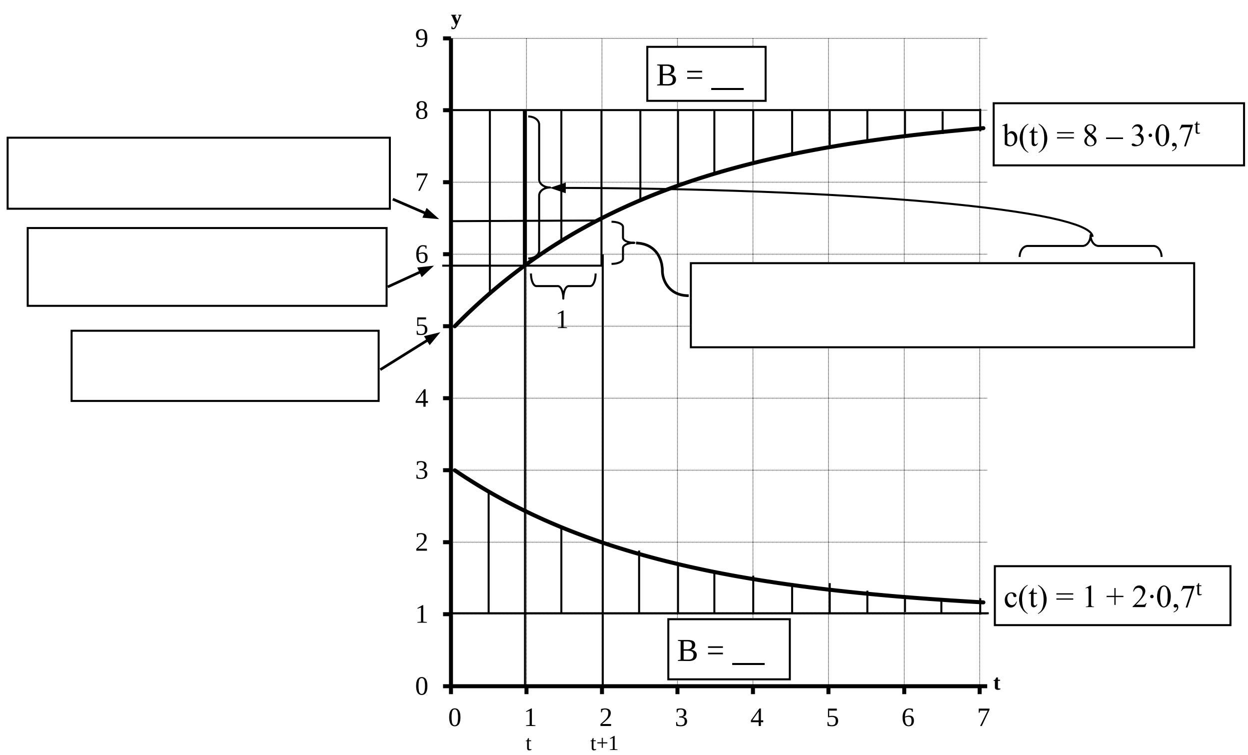
4. Sein **Graph** ist eine Kurve, die die y-Achse bei ______ schneidet.

5. **Achtung:** Die Änderungsrate hängt von der gewählten Zeiteinheit ab!



4.7.5. Beschränkte Änderungen

1. Ein Bestand b(t) ändert sich **beschränkt mit der Wachstumsgrenze B**,
   wenn die **Wachstumsreserve** B − b(t) **exponentiell abnimmt**:
   $B - b(t) = [B - b(0)]\cdot k^t$ bzw.
   b(t) = _______________________ mit **k** **1**
2. Seine **Änderung** setzt sich zusammen aus einer ____________ Abnahme mit dem **Änderungsfaktor** ___ und einer ____________ Zunahme mit der **konstanten Änderung** d = _________:
   $$\begin{aligned} b(t+1) &= B - [B - b(0)]\cdot k^{t+1} \\ &= B - [B - b(0)]\cdot k^t\cdot\_\_\_ \\ &= B - B\cdot k + B\cdot k - [B - b(0)]\cdot k^t\cdot\_\_ \\ &= B\cdot[\ \_\_\_\_\_\_\ ] + [B - [B - b(0)]\cdot k^t]\cdot\ \_\_ \\ &= \underbrace{B\cdot[\ \_\_\_\_\_\_\ ]}_{d} + b(t)\cdot\_\_ \\ &= d + b(t)\cdot\_\_ \end{aligned}$$
3. Die Änderung ist **proportional zur Wachstumsreserve** B − b(t) mit dem **Änderungsfaktor 1 – k**:
   $$\begin{aligned} b(t+1) &= B\cdot[1-k] + b(t)\cdot k \\ &= b(t) + B\cdot[1-k] + b(t)\cdot k - \_\_\_\_ \\ &= b(t) + B\cdot[1-k] + b(t)\cdot[\_\_\_\_\_\_] \\ &= b(t) + B\cdot[1-k] - b(t)\cdot[\_\_\_\_\_\_] \\ &= b(t) + [B - b(t)]\cdot[\_\_\_\_\_\_] \end{aligned}$$
4. Für B > b(0) nimmt b(t) _____, für B < b(0) nimmt er _____.
5. Sein **Graph** ist eine Kurve, die die y-Achse bei _____ schneidet.
   Die **Wachstumsgrenze** B = _________ ist eine ______________.



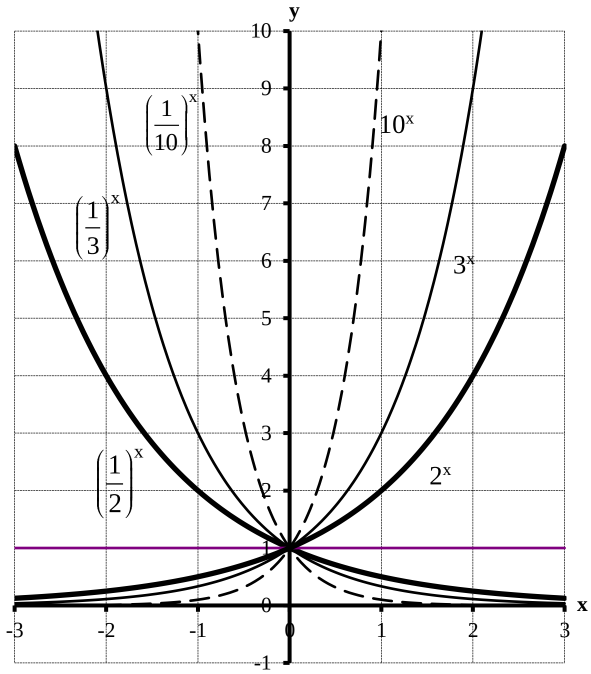
4.7. Exponential- und Logarithmusfunktionen

4.7.1. Exponentialfunktionen

Definition:
Die Funktion $f(x) = a^x$ mit der **Basis** $a \neq 1$ heißt **Exponentialfunktion**. Für die Basis a = e mit der **Eulerschen Zahl** e = 2,718... heißt sie **natürliche Exponentialfunktion** und wird auch als exp(x) geschrieben: $e^x = \exp(x)$.

Beispiele:

x	$\left(\frac{1}{10}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	2^x	3^x	10^x
−3	1000	27	8	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{1000}$
−2	100	9	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{100}$
−1	10	3	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$
0	1	1	1	1	1	1
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	3	10
2	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	4	9	100
3	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{8}$	8	27	1000



Eigenschaften der Exponentialfunktionen

- **Wertebereich**: $W = \mathbb{R}^+$
- **Waagrechte Asymptoten:** $a^x \to 0$ für $x \to -\infty$ und $a > 1$ bzw. für $x \to +\infty$ und $a < 1$
- **Symmetrie:** Spiegelt man den Graphen von $y = a^x$ an der y-Achse, so erhält man den Graphen von $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$
- **Gemeinsamer Punkt:** Die Graphen aller Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt P(0|1)
- **Wachstum**: Jede Exponentialfunktion wächst schließlich stärker als alle Potenzfunktionen: $a^x > b^n \Leftrightarrow x > n\frac{\log b}{\log a}$

Beispiel zur Bestimmung einer Funktionsgleichung
Bestimme die Gleichung der Exponentialfunktion $f(x) = c\cdot a^x$, deren Schaubild durch P(2|4) und Q(3|1) geht.
Lösung
Durch Einsetzen der Koordinaten der beiden Punkte in den Ansatz $y = c\cdot a^x$ erhält man zwei Gleichungen für zwei Unbekannte c und a:

$$\begin{array}{l} P(2|4): \\ Q(3|1): \end{array} \left| \begin{array}{l} 4 = c\cdot a^2 \\ 1 = c\cdot a^3 \end{array} \right|$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem löst man am besten mit dem Gleichsetzungsverfahren:

$$\left| \begin{array}{l} c = \frac{1}{4}a^2 \\ c = a^3 \end{array} \right|$$

$$a^3 = \frac{1}{4}a^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow c = a^3 = \frac{1}{64}$$

Die gesuchte Funktion hat die Gleichung $f(x) = \frac{1}{64}\cdot 0{,}25^x$.

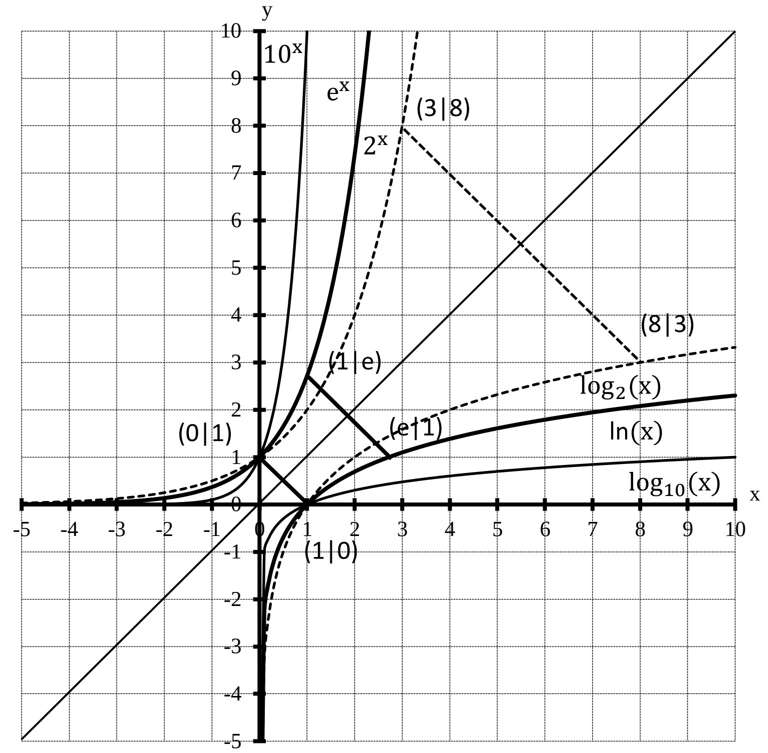
Übungen: Aufgaben zu exponentiellen Änderungen Nr. 1 - 3

4.7.2. Logarithmusfunktionen

Definition:
Die Funktion $y = \log_a(x)$ mit der **Basis** $a \neq 1$ heißt **Logarithmusfunktion**. Für die Basis a = e mit der **Eulerschen Zahl** e = 2,718... heißt sie **natürliche Logarithmusfunktion** und wird auch als **logarithmus naturalis** ln(x) bezeichnet: $\log_e(x) = \ln(x)$.

Beispiele:

x	$\log_{10}(x)$	x	ln(x)	x	$\log_2(x)$
$\frac{1}{1000}$	−3	$\frac{1}{e^3}$	−3	$\frac{1}{8}$	−3
$\frac{1}{100}$	−2	$\frac{1}{e^2}$	−2	$\frac{1}{4}$	−2
$\frac{1}{10}$	−1	$\frac{1}{e}$	−1	$\frac{1}{2}$	−1
1	0	1	0	1	0
10	1	e	1	2	1
100	2	e^2	2	4	2
1000	3	e^3	3	8	3



Eigenschaften:
$y = \log_a(x)$ ist die **Umkehrfunktion** zu $y = a^x$, d.h., man erhält
- ihren **Graphen** aus dem Graphen von $y = a^x$ durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden und
- ihre **Funktionsgleichung** aus der Funktionsgleichung $y = a^x$ durch Auflösen nach x und Vertauschung von x und y.

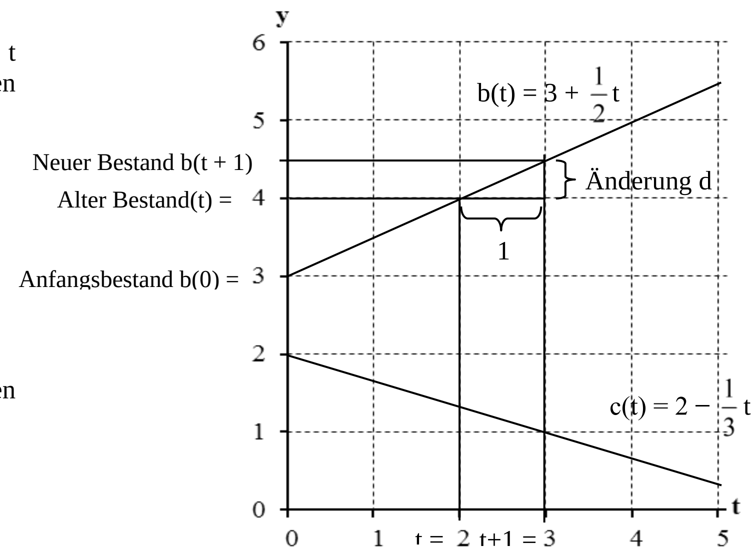
Insbesondere gilt:
- Die negative y-Achse ist senkrechte **Asymptote**
- Alle Graphen gehen durch den Punkt (1|0)

Übungen: Aufgaben zu exponentiellen Änderungen Nr. 4 und 5

4.7.3. Lineare Änderungen (siehe auch 4.1.)

Beispiel: 4.1. Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 2

Lineare Änderung (siehe auch 4.1.3.)
1. Ein Bestand b ändert sich **linear**, wenn nach t Zeitschritten gilt $b(t) = b(0) + d \cdot t$ mit der konstanten **Änderung** d und dem **Anfangswert** b(0).
2. Seine **Änderung** ist konstant: $b(t + 1) - b(t) = d$.
3. Für $d > 0$ nimmt b zu und für $d < 0$ nimmt er ab.
4. Sein **Graph** ist eine **Gerade** mit der **Steigung** d und dem **y-Achsenabschnitt** b(0).
5. **Achtung**: Die Änderung d hängt von der gewählten Zeiteinheit ab!

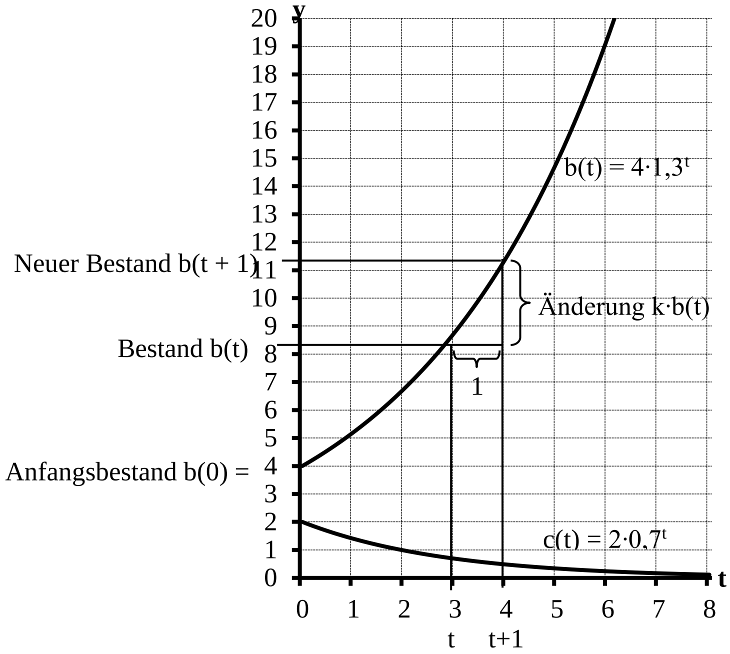


4.7.4. Exponentielle Änderungen

Beispiel: Aufgaben zu exponentielle Änderungen Nr. 6

Exponentielle Änderung

1. Ein Bestand b ändert sich **exponentiell**, wenn nach t Zeitschritten gilt $b(t) = b(0)\cdot k^t$ mit dem **Änderungsfaktor** k und dem **Anfangsbestand** b(0).
2. Für **k > 1** nimmt b(t) zu und für **k < 1** nimmt er ab.
3. Seine **Änderung** ist proportional zum **Bestand**:
   $b(t + 1) - b(t) = b(0)\cdot k^{t+1} = b(0)\cdot k^t\cdot k = b(t)\cdot k$.
4. Sein **Graph** ist eine Kurve, die die y-Achse bei b(0) schneidet:
5. **Achtung:** Die Änderungsrate hängt von der gewählten Zeiteinheit ab!



Beispiel zur Umrechnung der Änderungsrate auf andere Zeiteinheiten:
Eine Anlage wird mit 5 % monatlich verzinst. Berechne die Zinsrate bezogen auf
a) ein Jahr
b) einen Tag.
Hinweis: Banken rechnen mit 12 Monaten zu 30 Tagen.

Lösung:

Der Wachstumsfaktor ist $(1 + \frac{p}{100}) = 1{,}05$ bezogen auf 1 Monat.

a) Bezogen auf 1 Jahr = 12 Monate ist $(1 + \frac{p}{100})^{12\cdot} = 1{,}05^{12} = 1{,}79 \Rightarrow$ jährliche Zinsrate 79 %

b) Bezogen auf 1 Tag = $\frac{1}{30}$ Monat ist $(1 + \frac{p}{100})^{1/30\cdot} = 1{,}05^{1/30} = 1{,}0016 \Rightarrow$ tägliche Zinsrate 0,16 %

Übungen: Aufgaben zu exponentiellen Änderungen Nr. 7 - 13

4.7.5. Beschränkte Änderungen

Beispiel: Aufgaben zu beschränkten Änderungen Nr. 1

Beschränkte Änderung

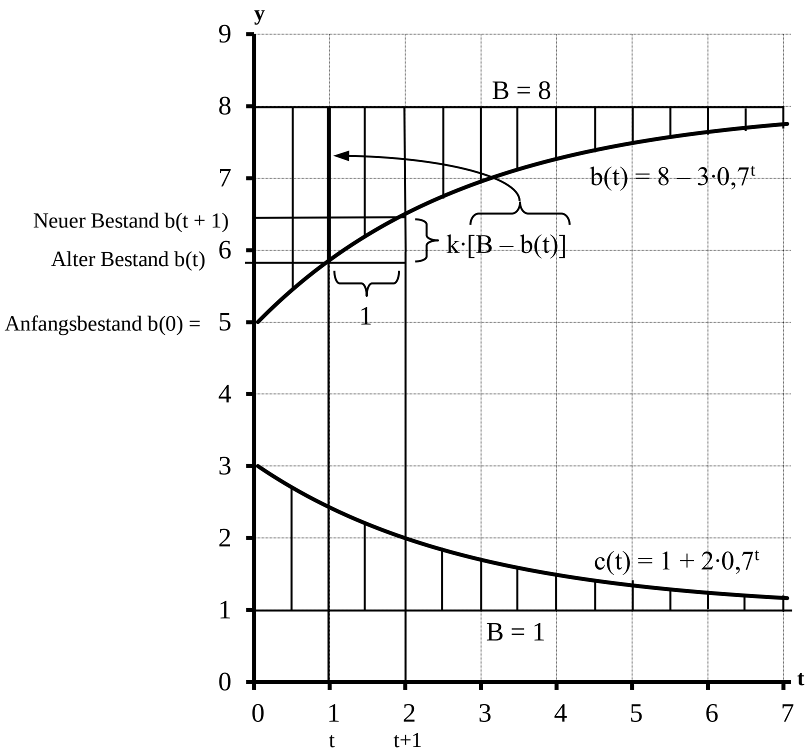
1. Eine Bestand b(t) ändert sich **beschränkt mit der Wachstumsgrenze B**, wenn die **Wachstumsreserve** B − b(t) **exponentiell abnimmt**:
   $B - b(t) = [B - b(0)]\cdot k^t$ bzw.
   $b(t) = B - [B - b(0)]\cdot k^t$ mit $\mathbf{k < 1}$

2. Seine **Änderung** setzt sich zusammen aus einer **linearen Zunahme** mit der **konstanten Änderung d = B·(1 – k)** und einer **exponentiellen Abnahme** mit dem **Änderungsfaktor k < 1** :
   $$\begin{aligned} b(t+1) &= B - [B - b(0)]\cdot k^{t+1} \\ &= B - [B - b(0)]\cdot k^t\cdot k \\ &= B - B\cdot k + B\cdot k - [B - b(0)]\cdot k^t\cdot k \\ &= B\cdot[1-k] + [B - [B - b(0)]\cdot k^t]\cdot k \\ &= \underbrace{B\cdot[1-k]} + b(t)\cdot k \\ &= \quad d \quad + \ b(t)\cdot k \end{aligned}$$

3. Die Änderung ist **proportional zur Wachstumsreserve** B − b(t) mit dem **Änderungsfaktor 1 – k**:
   $$\begin{aligned} b(t+1) &= B\cdot[1-k] + b(t)\cdot k \\ &= b(t) + B\cdot[1-k] + b(t)\cdot k - b(t) \\ &= b(t) + B\cdot[1-k] + b(t)\cdot[k-1] \\ &= b(t) + B\cdot[1-k] - b(t)\cdot[1-k] \\ &= b(t) + [B - b(t)]\cdot[1-k] \end{aligned}$$

4. Für B > b(0) nimmt b(t) **ab**, für B < b(0) nimmt er **zu**.

5. Sein **Graph** ist eine Kurve, die die y-Achse bei b(0) schneidet und sich der **Wachstumsgrenze** B **asymptotisch** nähert:



Beispiel für den Nachweis eines beschränkten Wachstums und Berechnung von G und k:
Für einen Bestand b(t) nach t Zeitschritten wurde die Beziehung $b(t + 1) = 0{,}8\cdot b(t) + 10$ mit $g(0) = 20$ ermittelt. Zeige, dass es sich um beschränktes Wachstum handelt und berechne die Grenze B sowie den Wachstumsfaktor k.

Lösung:

Änderungsfaktor k = 0,8 und Grenze $B = \frac{d}{1-k} = \frac{10}{1-0{,}8} = 50$

$\Rightarrow b(t) = B - [B - g(0)]\cdot k^t = 50 - 30\cdot 0{,}8^t$.

4.7.6. Logistische Änderungen

Beispiel: Aufgaben zum logistischen Wachstum Nr. 1

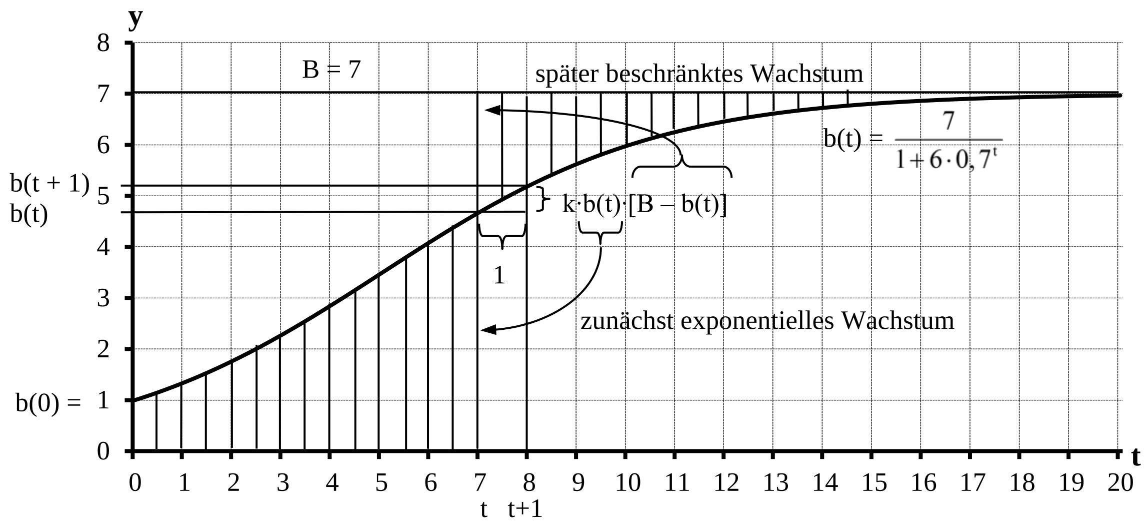
Logistische Änderungen

1. Eine Größe b(t) ändert sich **logistisch mit der Wachstumsgrenze** B, wenn $b(t) = \dfrac{B}{1+\left[\dfrac{B}{b(0)}-1\right]\cdot(1-k\cdot B)^t}$.

2. Ihre **Änderung** ist proportional zum **Bestand b(t)** und zur **Wachstumsreserve B − b(t)**:
   b(t + 1) − b(t) = k·b(t)·[B − b(t)]

3. Für B > b(0) erhält man eine **Zunahme** und für B < b(0) eine **Abnahme**.

4. Ihr **Graph** ist eine S-Kurve, die die y-Achse bei b(0) schneidet und sich der **Wachstumsgrenze** B asymptotisch nähert.



Übungen: Aufgaben zu logistischen Wachstum Aufgaben 2 - 4