

4.7. Exponential- und Logarithmusfunktionen

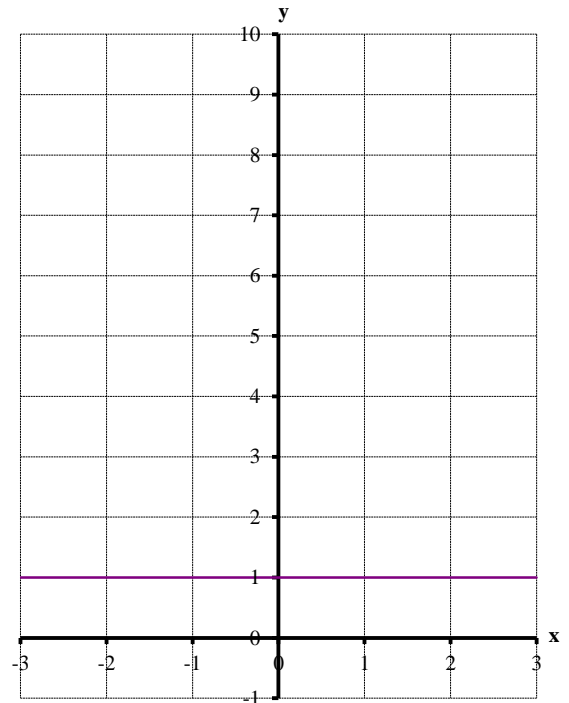
4.7.1. Exponentialfunktionen

Definition:

Die Funktion $y = a^x$ mit der _____ $a \neq 1$ heißt **Exponentialfunktion**. Für die Basis $a = e$ mit der _____ **Zahl** $e =$ _____ heißt sie _____ **Exponentialfunktion** und wird auch $y = e^x = \exp(x)$ geschrieben.

Beispiele:

x	$\left(\frac{1}{10}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	2^x	3^x	10^x
-3						
-2						
-1						
0						
1						
2						
3						



Eigenschaften der Exponentialfunktionen

- **Wertebereich:**
- **Waagrechte Asymptoten:** $a^x \rightarrow$ _____ $\begin{cases} \text{für } x \rightarrow +\infty, \text{ falls } a \text{ _____} \\ \text{für } x \rightarrow -\infty, \text{ falls } a \text{ _____} \end{cases}$
- **Symmetrie:** Spiegelt man den Graphen von $y = a^x$ an der _____-Achse, so erhält man den Graphen von $y =$ _____
- **Gemeinsamer Punkt:** Die Graphen aller Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt _____
- **Wachstum:** Jede Exponentialfunktion wächst schließlich stärker als alle _____ !

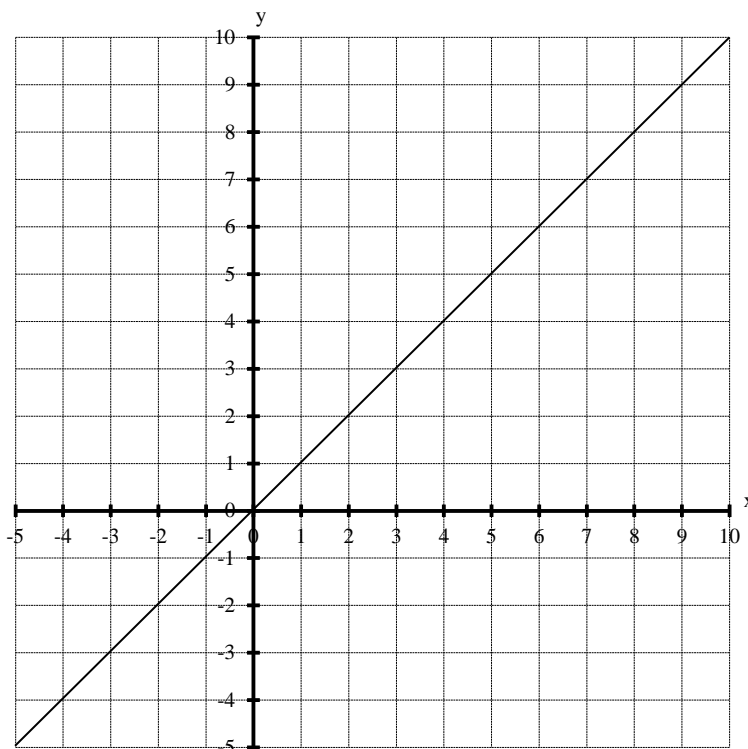
4.7.2. Logarithmusfunktionen

Definition:

Die Funktion $y = \log_a(x)$ mit der _____ $a \neq 1$ heißt **Logarithmusfunktion**. Für die Basis $a = e$ mit der _____ **Zahl** $e =$ _____ heißt sie _____ **Logarithmusfunktion** und wird auch als **logarithmus naturalis** $\ln(x) = \log_e(x)$ bezeichnet

Beispiele:

x	$\log_{10}(x)$	x	$\ln(x)$	x	$\log_2(x)$
$\frac{1}{1000}$		$\frac{1}{e^3}$		$\frac{1}{8}$	
$\frac{1}{100}$		$\frac{1}{e^2}$		$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{e}$		$\frac{1}{2}$	
1		1		1	
10		e		2	
100		e^2		4	
1000		e^3		8	



Eigenschaften:

$y = \log_a(x)$ ist die _____ zu $y = a^x$, d.h., man erhält

- ihren **Graphen** aus dem Graphen von $y = a^x$ durch _____ an der 1. Winkelhalbierenden
- ihre **Funktionsgleichung** aus der Gleichung $y = a^x$ durch _____ nach x und _____ von x und y.

Insbesondere gilt:

- Die negative y-Achse ist senkrechte _____
- Alle Graphen gehen durch den Punkt _____

Übungen: Aufgaben zu exponentiellen Änderungen Nr. 4 und 5

4.7.3. Lineare Änderungen (siehe auch 4.1.)

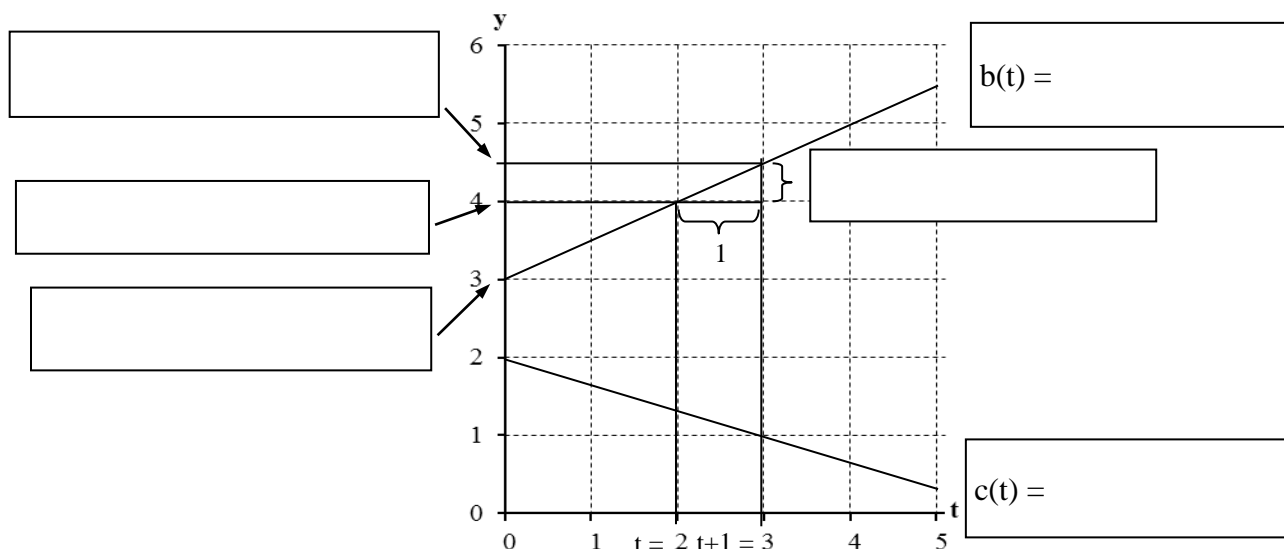
1. Ein Bestand b ändert sich **linear**, wenn nach t Zeitschritten gilt $b(t) = b(0) + k \cdot t$ mit der konstanten **Änderung** d und dem **Anfangswert** $b(0)$.

2. Seine **Änderung** erfolgt immer um den gleichen _____:

$$\begin{aligned} b(t+1) &= b(0) + d \cdot (t+1) \\ &= b(0) + d \cdot t + \underline{\quad} \\ &= b(t) + \underline{\quad} \end{aligned}$$

3. Für $d > 0$ nimmt der Bestand _____ und für $d < 0$ nimmt er _____.

4. Sein **Graph** ist eine _____ mit der **Steigung** _____ und dem **y-Achsenabschnitt** _____.



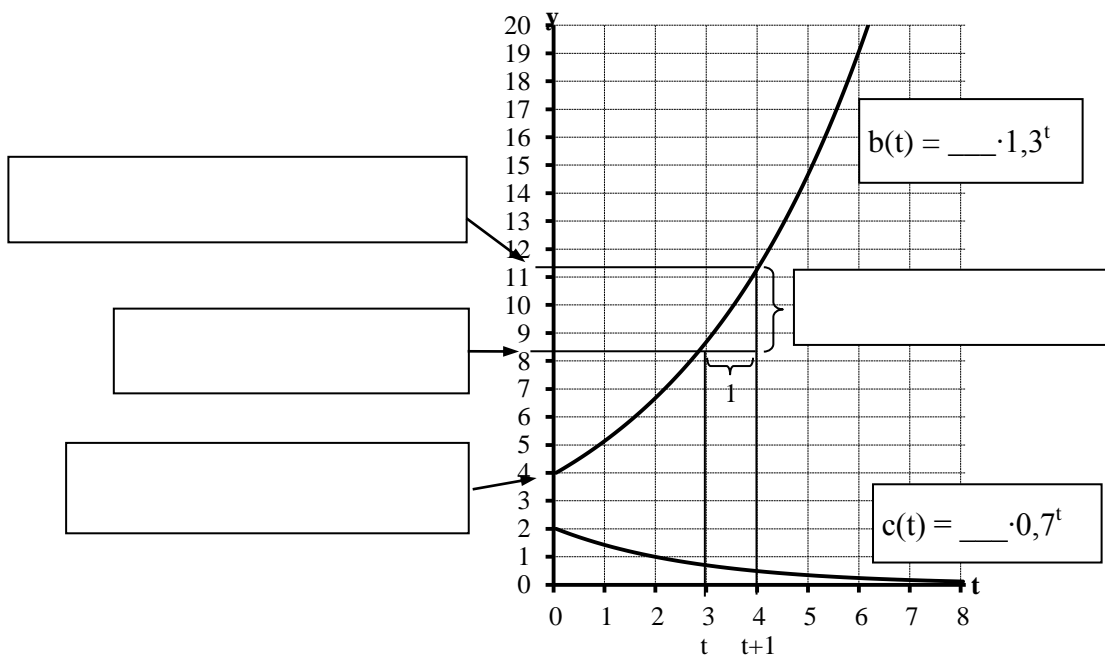
4.7.4. Exponentielle Änderungen

- Ein Bestand b ändert sich **exponentiell**, wenn nach t Zeitschritten gilt $b(t) = b(0) \cdot k^t$ mit dem _____ k und dem _____ $b(0)$.
- Für $k > 1$ nimmt der Bestand _____ und für $k < 1$ nimmt er _____.
- Seine **Änderung** erfolgt immer um den gleichen _____ :

$$b(t+1) = b(0) \cdot k^{t+1}$$

$$= b(0) \cdot k^t \cdot \underline{\hspace{1cm}}$$

$$= b(t) \cdot \underline{\hspace{1cm}}.$$
- Sein **Graph** ist eine Kurve, die die y-Achse bei _____ schneidet.
- Achtung:** Die Änderungsrate hängt von der gewählten Zeiteinheit ab!

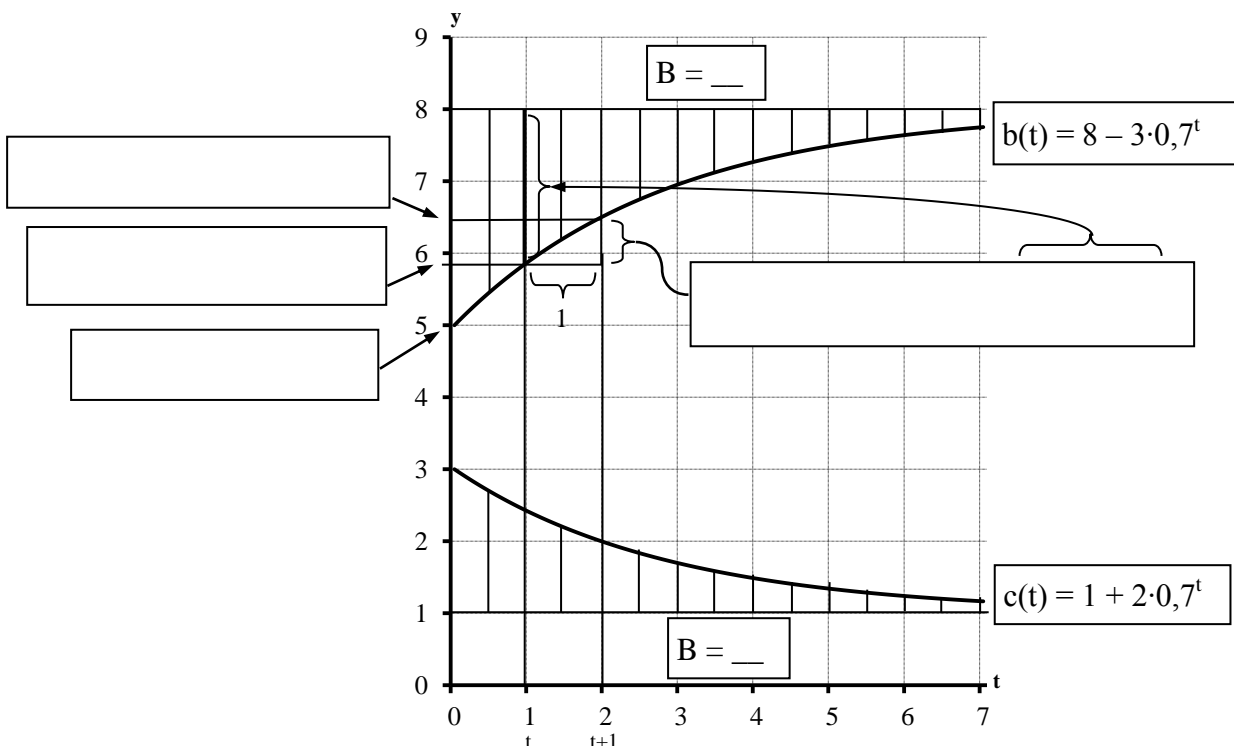


4.7.5. Beschränkte Änderungen

- Ein Bestand $b(t)$ ändert sich **beschränkt mit der Wachstumsgrenze B** , wenn die **Wachstumsreserve $B - b(t)$ exponentiell abnimmt**:
 $B - b(t) = [B - b(0)] \cdot k^t$ bzw.
 $b(t) = \underline{\hspace{2cm}}$ mit $k < 1$
- Seine **Änderung** setzt sich zusammen aus einer $\underline{\hspace{2cm}}$ Abnahme mit dem **Änderungsfaktor** $\underline{\hspace{2cm}}$ und einer $\underline{\hspace{2cm}}$ Zunahme mit der **konstanten Änderung $d = \underline{\hspace{2cm}}$** :

$$\begin{aligned} b(t+1) &= B - [B - b(0)] \cdot k^{t+1} \\ &= B - [B - b(0)] \cdot k^t \cdot \underline{\hspace{1cm}} \\ &= B - B \cdot k + B \cdot k - [B - b(0)] \cdot k^t \cdot \underline{\hspace{1cm}} \\ &= B \cdot [\underline{\hspace{1cm}}] + [B - [B - b(0)] \cdot k^t] \cdot \underline{\hspace{1cm}} \\ &= \underbrace{B \cdot [\underline{\hspace{1cm}}]}_{d} + b(t) \cdot \underline{\hspace{1cm}} \\ &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$
- Die Änderung ist **proportional zur Wachstumsreserve $B - b(t)$ mit dem Änderungsfaktor $1 - k$** :

$$\begin{aligned} b(t+1) &= B \cdot [1 - k] + b(t) \cdot k \\ &= b(t) + B \cdot [1 - k] + b(t) \cdot k - \underline{\hspace{1cm}} \\ &= b(t) + B \cdot [1 - k] + b(t) \cdot [\underline{\hspace{1cm}}] \\ &= b(t) + B \cdot [1 - k] - b(t) \cdot [\underline{\hspace{1cm}}] \\ &= b(t) + [B - b(t)] \cdot [\underline{\hspace{1cm}}] \end{aligned}$$
- Für $B > b(0)$ nimmt $b(t)$ $\underline{\hspace{2cm}}$, für $B < b(0)$ nimmt er $\underline{\hspace{2cm}}$.
- Sein **Graph** ist eine Kurve, die die y-Achse bei $\underline{\hspace{2cm}}$ schneidet.
 Die **Wachstumsgrenze $B = \underline{\hspace{2cm}}$** ist eine $\underline{\hspace{2cm}}$.



4.7. Exponential- und Logarithmusfunktionen

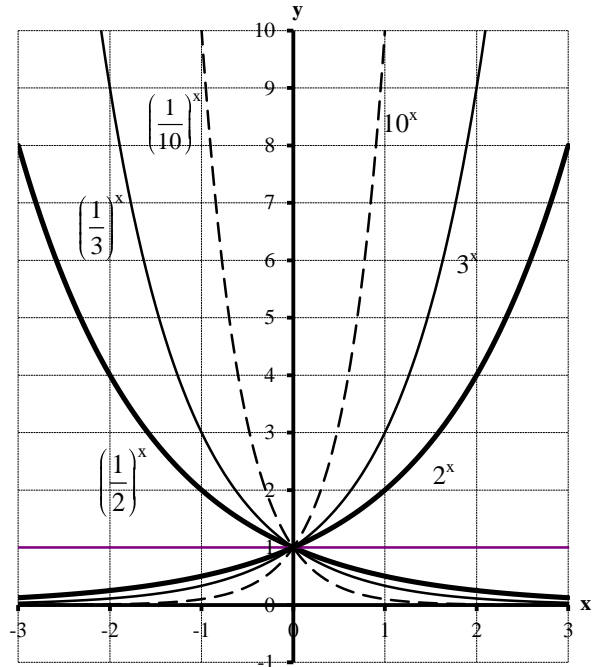
4.7.1. Exponentialfunktionen

Definition:

Die Funktion $f(x) = a^x$ mit der **Basis** $a \neq 1$ heißt **Exponentialfunktion**. Für die Basis $a = e$ mit der **Eulerschen Zahl** $e = 2,718\dots$ heißt sie **natürliche Exponentialfunktion** und wird auch als $\exp(x)$ geschrieben: $e^x = \exp(x)$.

Beispiele:

x	$\left(\frac{1}{10}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	2^x	3^x	10^x
-3	1000	27	8	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{1000}$
-2	100	9	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{100}$
-1	10	3	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$
0	1	1	1	1	1	1
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	3	10
2	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	4	9	100
3	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{8}$	8	27	1000



Eigenschaften der Exponentialfunktionen

- **Wertebereich:** $W = \mathbb{R}^+$
- **Waagrechte Asymptoten:** $a^x \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$ und $a > 1$ bzw. für $x \rightarrow +\infty$ und $a < 1$
- **Symmetrie:** Spiegelt man den Graphen von $y = a^x$ an der y-Achse, so erhält man den Graphen von $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$
- **Gemeinsamer Punkt:** Die Graphen aller Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt $P(0|1)$
- **Wachstum:** Jede Exponentialfunktion wächst schließlich stärker als alle Potenzfunktionen: $a^x > b^n \Leftrightarrow x > n \frac{\log b}{\log a}$

Beispiel zur Bestimmung einer Funktionsgleichung

Bestimme die Gleichung der Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$, deren Schaubild durch $P(2|4)$ und $Q(3|1)$ geht.

Lösung

Durch Einsetzen der Koordinaten der beiden Punkte in den Ansatz $y = c \cdot a^x$ erhält man zwei Gleichungen für zwei Unbekannte c und a :

$$\begin{aligned} P(2|4): & \quad 4 = c \cdot a^2 \\ Q(3|1): & \quad 1 = c \cdot a^3 \end{aligned}$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem löst man am besten mit dem Gleichsetzungsverfahren:

$$\begin{aligned} \left| \begin{aligned} c &= \frac{1}{4} a^2 \\ c &= a^3 \end{aligned} \right. \\ a^3 &= \frac{1}{4} a^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow c = a^3 = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion hat die Gleichung $f(x) = \frac{1}{64} \cdot 0,25^x$.

Übungen: Aufgaben zu exponentiellen Änderungen Nr. 1 - 3

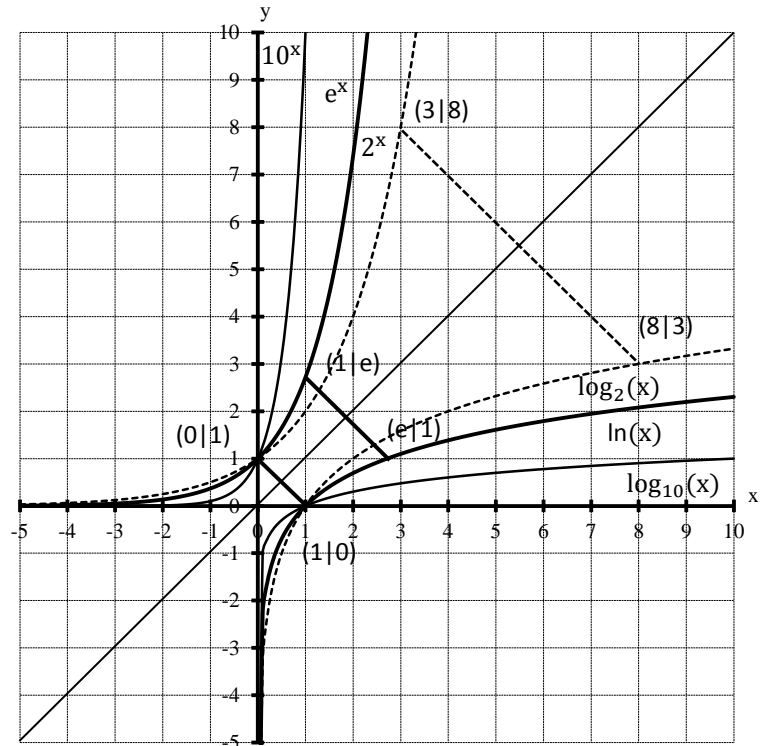
4.7.2. Logarithmusfunktionen

Definition:

Die Funktion $y = \log_a(x)$ mit der **Basis** $a \neq 1$ heißt **Logarithmusfunktion**. Für die Basis $a = e$ mit der **Eulerschen Zahl** $e = 2,718\dots$ heißt sie **natürliche Logarithmusfunktion** und wird auch als **logarithmus naturalis** $\ln(x)$ bezeichnet: $\log_e(x) = \ln(x)$.

Beispiele:

x	$\log_{10}(x)$	x	$\ln(x)$	x	$\log_2(x)$
$\frac{1}{1000}$	-3	$\frac{1}{e^3}$	-3	$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{100}$	-2	$\frac{1}{e^2}$	-2	$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{10}$	-1	$\frac{1}{e}$	-1	$\frac{1}{2}$	-1
1	0	1	0	1	0
10	1	e	1	2	1
100	2	e^2	2	4	2
1000	3	e^3	3	8	3



Eigenschaften:

$y = \log_a(x)$ ist die **Umkehrfunktion** zu $y = a^x$, d.h., man erhält

- ihren **Graphen** aus dem Graphen von $y = a^x$ durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden und
- ihre **Funktionsgleichung** aus der Funktionsgleichung $y = a^x$ durch Auflösen nach x und Vertauschung von x und y.

Insbesondere gilt:

- Die negative y-Achse ist senkrechte **Asymptote**
- Alle Graphen gehen durch den Punkt (1|0)

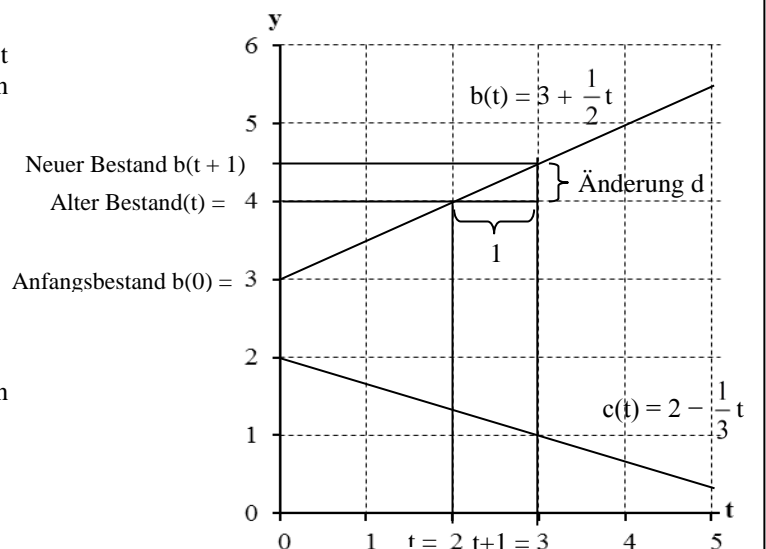
Übungen: Aufgaben zu exponentiellen Änderungen Nr. 4 und 5

4.7.3. Lineare Änderungen (siehe auch 4.1.)

Beispiel: 4.1. Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 2

Lineare Änderung (siehe auch 4.1.3.)

- Ein Bestand b ändert sich **linear**, wenn nach t Zeitschritten gilt $b(t) = b(0) + d \cdot t$ mit der konstanten **Änderung** d und dem **Anfangswert** b(0).
- Seine **Änderung** ist konstant: $b(t+1) - b(t) = d$.
- Für $d > 0$ nimmt b zu und für $d < 0$ nimmt er ab.
- Sein **Graph** ist eine **Gerade** mit der **Steigung** d und dem **y-Achsenabschnitt** b(0).
- Achtung:** Die Änderung d hängt von der gewählten Zeiteinheit ab!

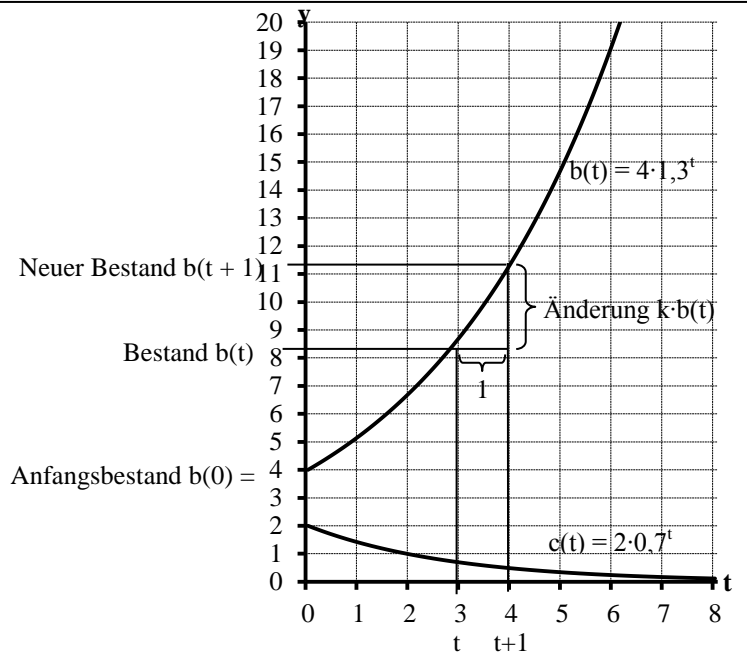


4.7.4. Exponentielle Änderungen

Beispiel: Aufgaben zu exponentielle Änderungen Nr. 6

Exponentielle Änderung

- Ein Bestand b ändert sich **exponentiell**, wenn nach t Zeitschritten gilt $b(t) = b(0) \cdot k^t$ mit dem **Änderungsfaktor** k und dem **Anfangsbestand** $b(0)$.
- Für $k > 1$ nimmt $b(t)$ zu und für $k < 1$ nimmt er ab.
- Seine **Änderung** ist proportional zum **Bestand**:
 $b(t+1) - b(t) = b(0) \cdot k^{t+1} - b(0) \cdot k^t = b(0) \cdot k^t \cdot k - b(0) \cdot k^t = b(t) \cdot k - b(t) = b(t) \cdot (k - 1)$
- Sein **Graph** ist eine Kurve, die die y -Achse bei $b(0)$ schneidet:
- Achtung:** Die Änderungsrate hängt von der gewählten Zeiteinheit ab!



Beispiel zur Umrechnung der Änderungsrate auf andere Zeiteinheiten:

Eine Anlage wird mit 5 % monatlich verzinst. Berechne die Zinsrate bezogen auf

- ein Jahr
- einen Tag.

Hinweis: Banken rechnen mit 12 Monaten zu 30 Tagen.

Lösung:

Der Wachstumsfaktor ist $(1 + \frac{p}{100}) = 1,05$ bezogen auf 1 Monat.

- Bezogen auf 1 Jahr = 12 Monate ist $(1 + \frac{p}{100})^{12} = 1,05^{12} = 1,79 \Rightarrow$ jährliche Zinsrate 79 %
- Bezogen auf 1 Tag = $\frac{1}{30}$ Monat ist $(1 + \frac{p}{100})^{1/30} = 1,05^{1/30} = 1,0016 \Rightarrow$ tägliche Zinsrate 0,16 %

Übungen: Aufgaben zu exponentiellen Änderungen Nr. 7 - 13

4.7.5. Beschränkte Änderungen

Beispiel: Aufgaben zu beschränkten Änderungen Nr. 1

Beschränkte Änderung

1. Eine Bestand $b(t)$ ändert sich **beschränkt mit der Wachstumsgrenze B** , wenn die **Wachstumsreserve $B - b(t)$ exponentiell abnimmt**:

$$B - b(t) = [B - b(0)] \cdot k^t \text{ bzw.}$$

$$b(t) = B - [B - b(0)] \cdot k^t \text{ mit } k < 1$$

2. Seine **Änderung** setzt sich zusammen aus einer **linearen Zunahme** mit der **konstanten Änderung $d = B \cdot (1 - k)$** und einer **exponentiellen Abnahme** mit dem **Änderungsfaktor $k < 1$** :

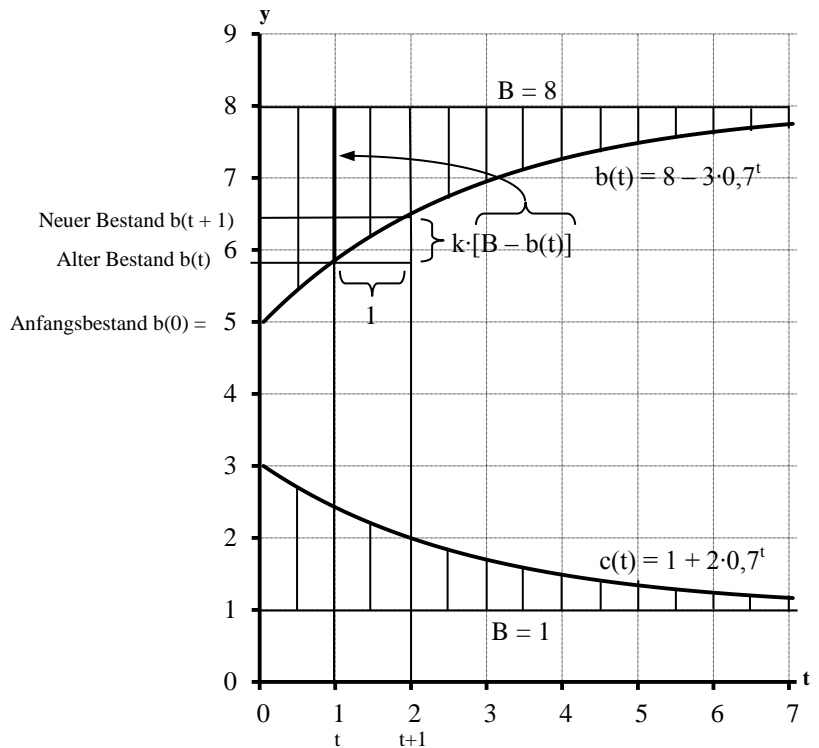
$$\begin{aligned} b(t+1) &= B - [B - b(0)] \cdot k^{t+1} \\ &= B - [B - b(0)] \cdot k^t \cdot k \\ &= B - B \cdot k + B \cdot k - [B - b(0)] \cdot k^t \cdot k \\ &= B \cdot [1 - k] + [B - [B - b(0)] \cdot k^t] \cdot k \\ &= B \cdot [1 - k] + b(t) \cdot k \\ &= \underbrace{B \cdot [1 - k]}_d + b(t) \cdot k \end{aligned}$$

3. Die **Änderung** ist **proportional zur Wachstumsreserve $B - b(t)$** mit dem **Änderungsfaktor $1 - k$** :

$$\begin{aligned} b(t+1) &= B \cdot [1 - k] + b(t) \cdot k \\ &= b(t) + B \cdot [1 - k] + b(t) \cdot k - b(t) \\ &= b(t) + B \cdot [1 - k] + b(t) \cdot [k - 1] \\ &= b(t) + B \cdot [1 - k] - b(t) \cdot [1 - k] \\ &= b(t) + [B - b(t)] \cdot [1 - k] \end{aligned}$$

4. Für $B > b(0)$ nimmt $b(t)$ **ab**, für $B < b(0)$ nimmt er **zu**.

5. Sein **Graph** ist eine Kurve, die die y-Achse bei $b(0)$ schneidet und sich der **Wachstumsgrenze B asymptotisch** nähert:



Beispiel für den Nachweis eines beschränkten Wachstums und Berechnung von G und k :

Für einen Bestand $b(t)$ nach t Zeitschritten wurde die Beziehung $b(t+1) = 0,8 \cdot b(t) + 10$ mit $b(0) = 20$ ermittelt. Zeige, dass es sich um beschränktes Wachstum handelt und berechne die Grenze B sowie den Wachstumsfaktor k .

Lösung:

$$\text{Änderungsfaktor } k = 0,8 \text{ und Grenze } B = \frac{d}{1 - k} = \frac{10}{1 - 0,8} = 50$$

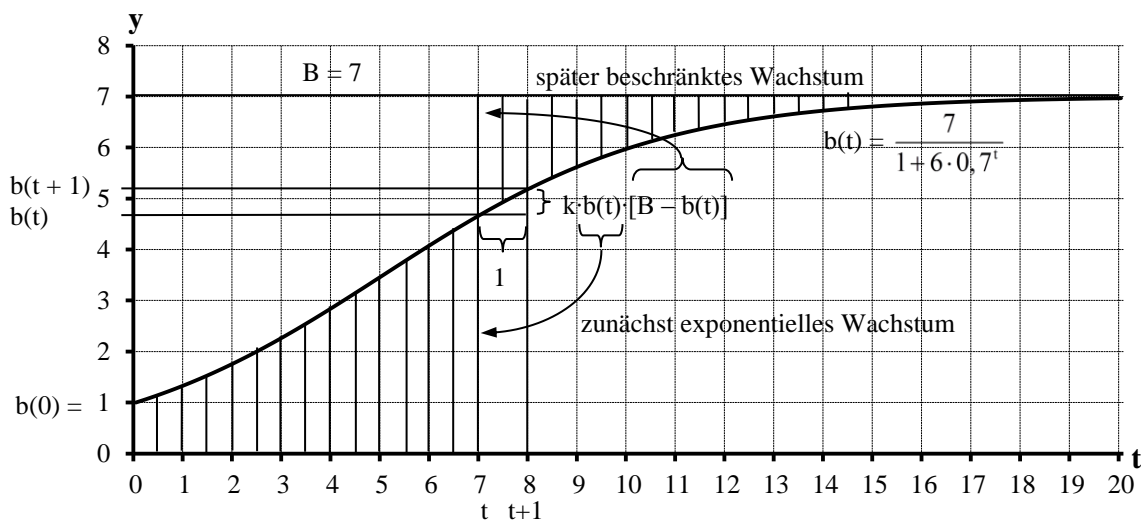
$$\Rightarrow b(t) = B - [B - b(0)] \cdot k^t = 50 - 30 \cdot 0,8^t.$$

4.7.6. Logistische Änderungen

Beispiel: Aufgaben zum logistischen Wachstum Nr. 1

Logistische Änderungen

1. Eine Größe $b(t)$ ändert sich **logistisch mit der Wachstumsgrenze B** , wenn $b(t) = \frac{B}{1 + \left[\frac{B}{b(0)} - 1 \right] \cdot (1 - k \cdot B)^t}$.
2. Ihre **Änderung** ist proportional zum **Bestand $b(t)$** und zur **Wachstumsreserve $B - b(t)$** :
 $b(t+1) - b(t) = k \cdot b(t) \cdot [B - b(t)]$
3. Für $B > b(0)$ erhält man eine **Zunahme** und für $B < b(0)$ eine **Abnahme**.
4. Ihr **Graph** ist eine S-Kurve, die die y-Achse bei $b(0)$ schneidet und sich der **Wachstumsgrenze B** asymptotisch nähert.



Übungen: Aufgaben zu logistischen Wachstum Aufgaben 2 - 4