

4.8. Prüfungsaufgaben zu trigonometrischen Funktionen

Aufgabe 1: Schaubilder der trigonometrischen Funktionen (2)

- a) Zeichne das Schaubild der Funktion $f(x) = \sin(0,5x)$ im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$.
b) Zeichne das Schaubild der Funktion $f(x) = \sin(2x)$ im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$.

Aufgabe 2: Trigonometrische Gleichungen (3)

Für welche x mit $0 \leq x \leq 2\pi$ sind die folgenden Gleichungen erfüllt?

- a) $\cos^2(x) - \frac{1}{2} \cos(x) = \frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{2} \sin(x) - \sin^2(x) = \frac{1}{2}$
c) $\sin^2(x)^2 + \sin(x) - 2 = 0$
d) $\sin(x) \cdot (\sin(x) + 3) = 0$
e) $\cos^2(x) - \cos(x) = 0$

Lösungen

a) Substitution $\cos(x) = z \Leftrightarrow z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \Rightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2}$ oder $\cos(x) = 1$

$$\Rightarrow L = \{0; \frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi; 2\pi\}$$

b) Substitution $\sin(x) = z \Leftrightarrow \frac{3}{2}z^2 - z - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4} \Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2}$ oder $\sin(x) = 1$

$$\Rightarrow L = \{\frac{1}{6}\pi; \frac{1}{2}\pi; \frac{5}{6}\pi\}$$

c) Substitution $\sin(x) = z \Rightarrow z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow z_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \sin(x) = -2$ oder $\sin(x) = 1 \Rightarrow L = \{\frac{\pi}{2}\}$

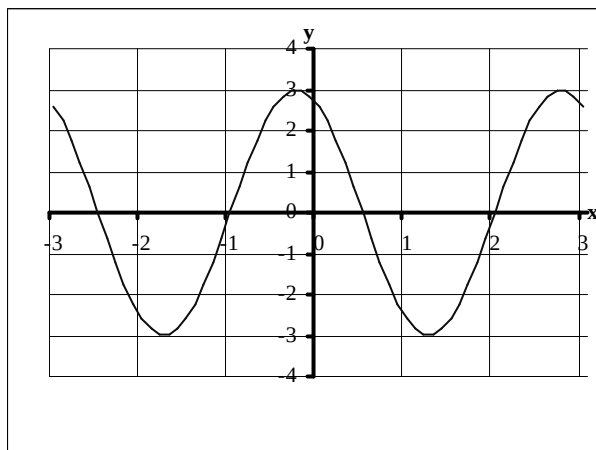
d) Substitution $\sin(x) = z \Rightarrow z \cdot (z + 3) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ oder $z = -3 \Leftrightarrow \sin(x) = -3$ oder $\sin(x) = 0 \Rightarrow L = \{0; \pi; 2\pi\}$

e) Substitution $\cos(x) = z \Leftrightarrow z(z - 1) = 0 \Rightarrow z = 0$ oder $z = 1 \Leftrightarrow \cos(x) = 0$ oder $\cos(x) = 1$

$$\Rightarrow L = \{0; \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi; 2\pi\}$$

Aufgabe 3: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (2)

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der unten skizzierten Funktion. (Hinweis: $f(-1) = f(2) = 0$)



Lösung

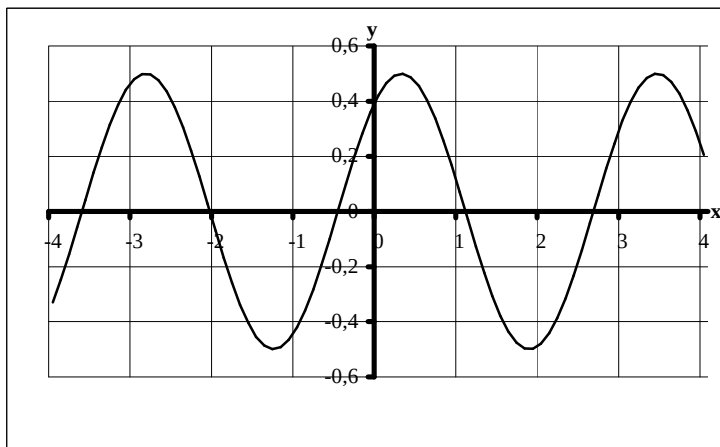
$$f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi(x + 1)\right)$$

Aufgabe 4: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (2)

Bestimmen Sie die Periode p sowie die Nullstellen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + 1)$ und skizzieren Sie ihr Schaubild im Bereich $[-p; p]$.

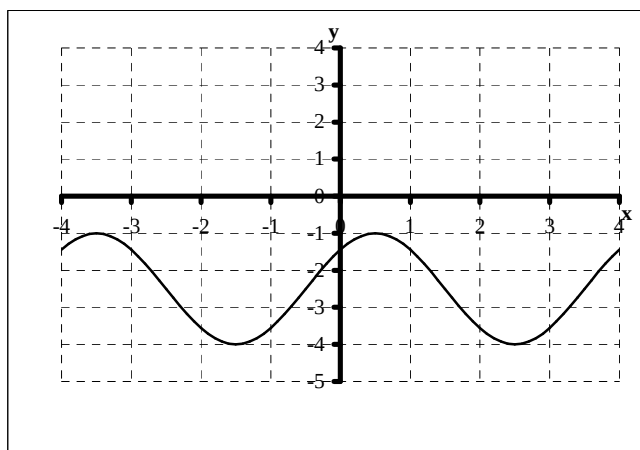
Lösung

$f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + 1) = f(x) = \frac{1}{2} \sin[2(x + \frac{1}{2})] \Rightarrow \text{Amplitude } A = \frac{1}{2}, \text{ Periode } p = \pi \text{ und Phasenverschiebung}$
um $\frac{1}{2}$ nach links $\Rightarrow$ Nullstellen bei $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2} + \pi$:



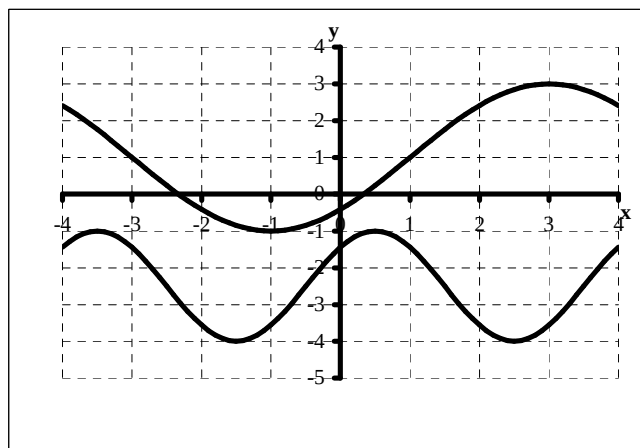
Aufgabe 5: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (4)

- a) Gib die Gleichung der unten skizzierten Funktion an (2)
b) Skizziere das Schaubild der Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin[\frac{\pi}{4}(x - 1)] + 1$ in das Koordinatensystem aus a) (2)



Lösung

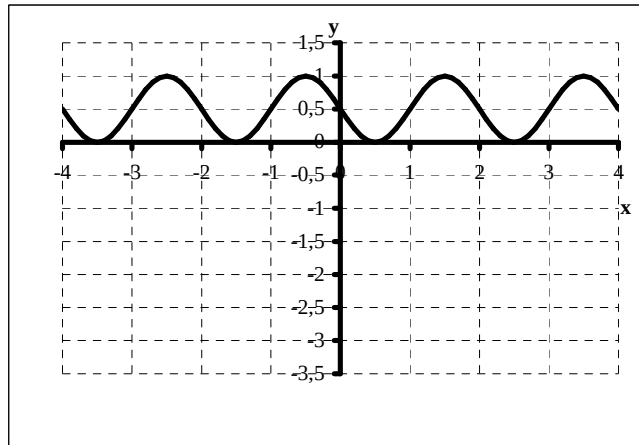
- a) $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin[\frac{\pi}{2}(x + \frac{1}{2})] - \frac{5}{2}$
b) Skizze



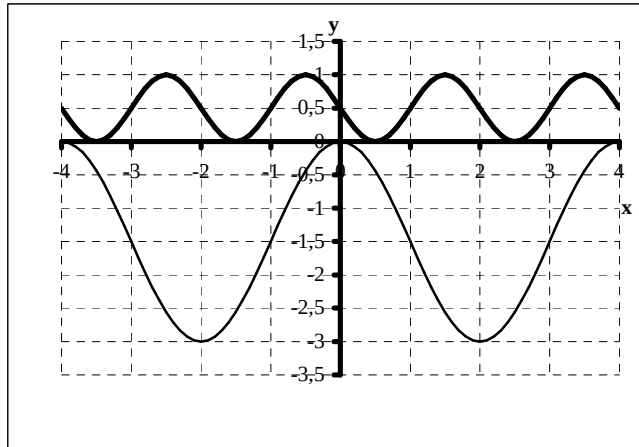
Aufgabe 6: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (4)

Gib die Gleichung der unten skizzierten Funktion an (2)

- a) Skizziere das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2}(x+1)\right] - \frac{3}{2}$ in das Koordinatensystem aus a) (2)

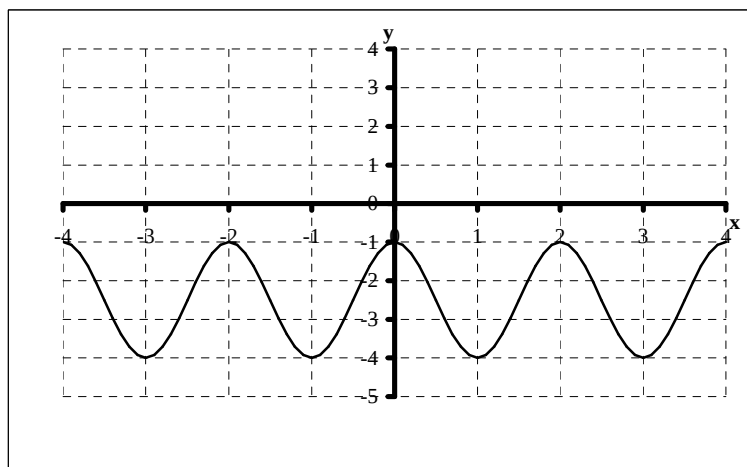
**Lösung**

- a) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin[\pi(x-1)] + \frac{1}{2}$
b) Skizze

**Aufgabe 7: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (4)**

- a) Gib die Gleichung der unten skizzierten Funktion an (2)

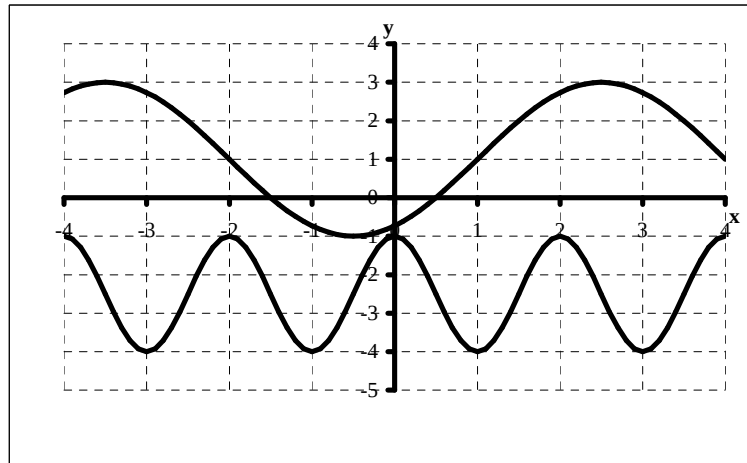
- b) Skizziere das Schaubild der Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{3}(x-1)\right] + 1$ in das Koordinatensystem aus a) (2)



Lösung

a) $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin\left[\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] - \frac{5}{2}$

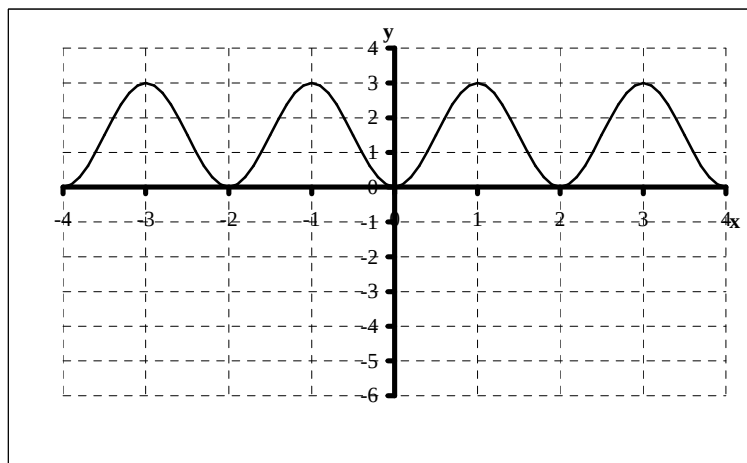
b) Skizze



Aufgabe 8: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (4)

a) Gib die Gleichung der unten skizzierten Funktion an (2)

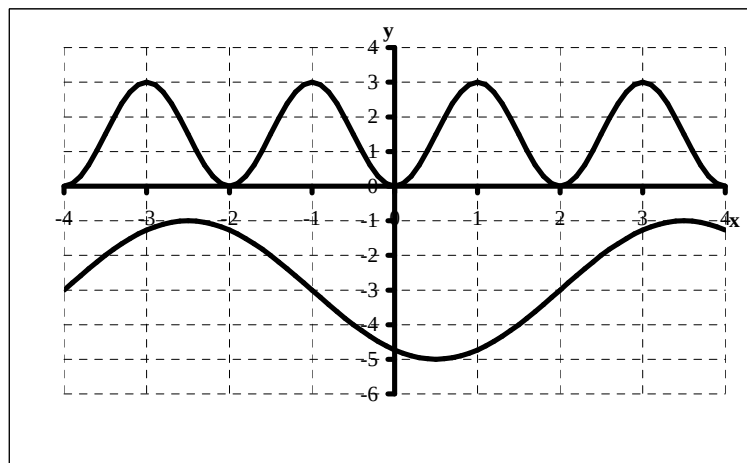
b) Skizziere das Schaubild der Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{3}(x - 2)\right] - 3$ in das Koordinatensystem aus a) (2)



Lösung

a) $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin\left[\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{3}{2}$

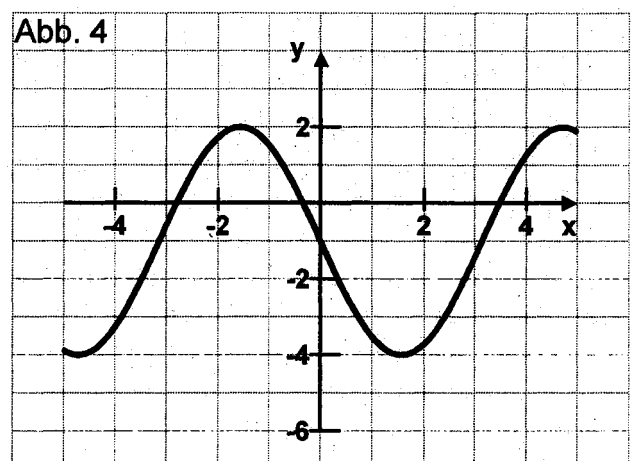
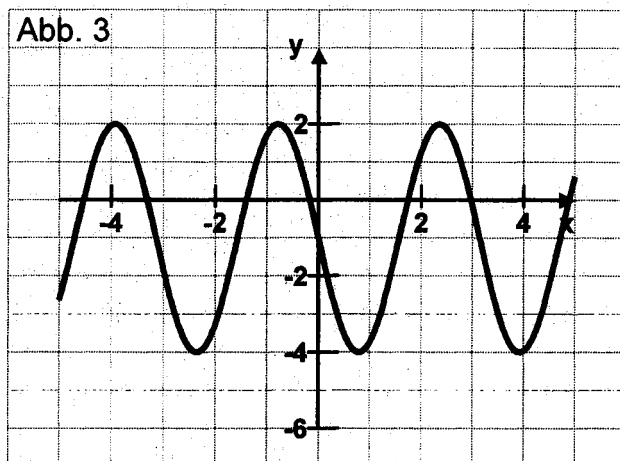
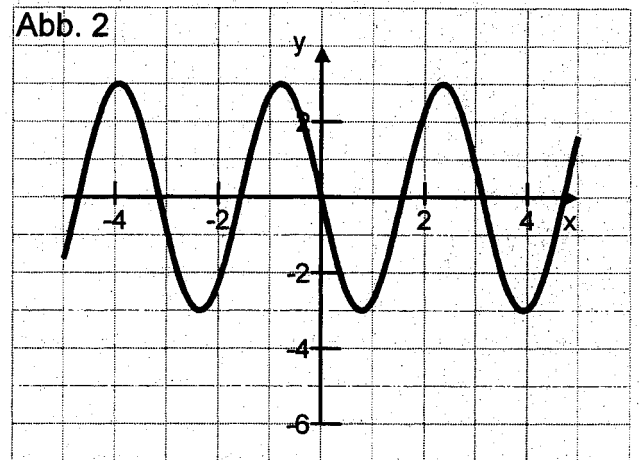
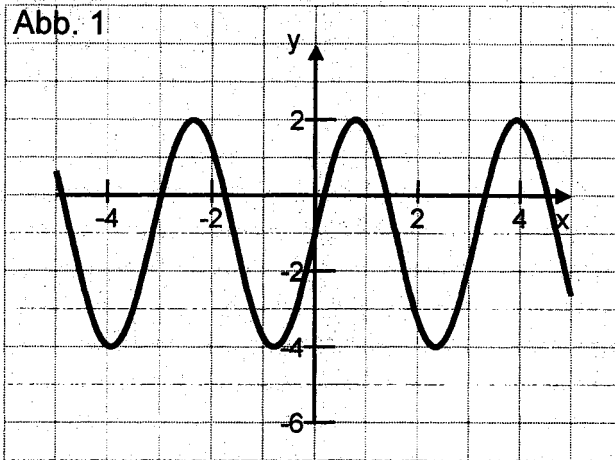
b) Skizze



Aufgabe 9: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (5)

Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = -3 \cdot \sin(2x) - 1$ sowie vier Schaubilder.

- Geben Sie die charakteristischen Eigenschaften des Schaubilds von f an, die man ohne weitere Rechnung dem Funktionsterm entnehmen kann.
- Welches Schaubild gehört zu f ?
- Geben Sie zu jedem anderen Schaubild mindestens eine Eigenschaft an, die mit den Funktionseigenschaften von f nicht vereinbar ist.



Lösung

- Amplitude 3 LE wegen Faktor -3 , Periode $p = \pi$ wegen Faktor 2, Verschiebung um 1 LE nach unten wegen Summand -1 und Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts oder links bzw. Spiegelung an $y = -1$ wegen Faktor -3 .
- Abb. 1: $y = 3 \cdot \sin(2x) - 1$ (falsche Phase)
 Abb. 2: $y = 3 \cdot \sin(2x)$ (fehlende Verschiebung)
 Abb. 3: $f(x) = 3 \cdot \sin(2x) - 1$ (richtiges Bild)
 Abb. 4: $y = 3 \cdot \sin(x) - 1$ (falsche Periode)

Aufgabe 10: Trigonometrische und rationale Funktionen im Vergleich (4)

Gegeben sind die Schaubilder von vier Funktionen jeweils mit sämtlichen Asymptoten:

Schaubild 1

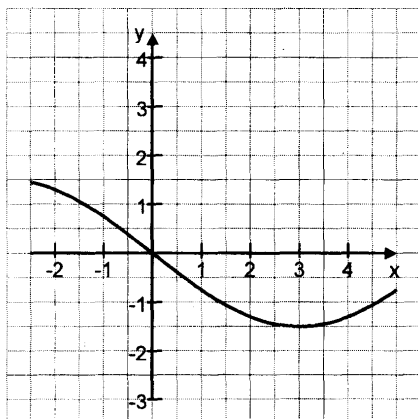


Schaubild 2

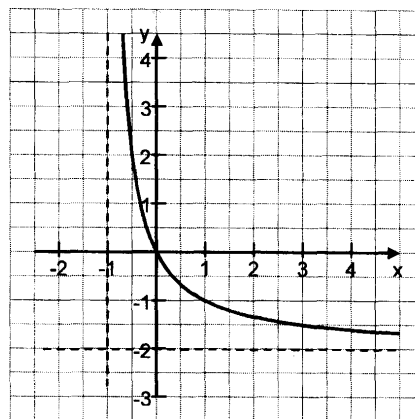


Schaubild 3

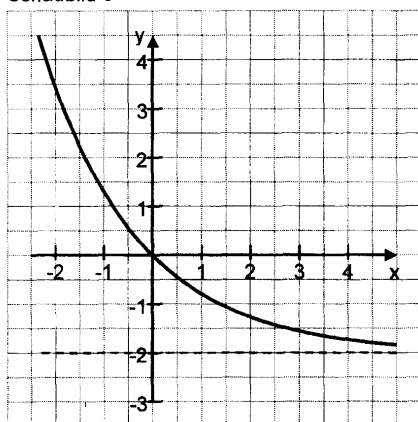
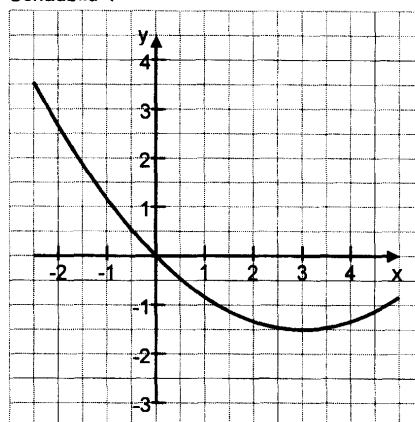


Schaubild 4



Drei dieser vier Schaubilder werden beschrieben durch die Funktionen f , g und h mit $f(x) = \frac{-2x}{x+a}$,

$g(x) = -2 + b \cdot e^{-0.5x}$ und $h(x) = c \cdot x^2 - x$.

- Ordnen Sie den Funktionen f , g und h jeweils das passende Schaubild zu und begründen Sie. (3)
- Bestimmen Sie die Werte für a und b . (2)

Lösung

- f gehört zu Schaubild 2, da nur dieses Schaubild eine senkrechte Asymptote besitzt. g gehört zu Schaubild 3, da nur noch dieses Schaubild eine waagerechte Asymptote besitzt. h gehört zu Schaubild 4, da nur dieses Schaubild eine Parabel zweiter Ordnung zeigt.
- Die senkrechte Asymptote $x = -1$ führt auf $a = 1$. $g(0) = 0$ führt auf $b = 2$.

Aufgabe 11: Funktionsanpassung bei rationalen und trigonometrischen Funktionen (4)

Geben Sie jeweils mit Begründung einen Funktionsterm der Funktionen f und g mit den folgenden Eigenschaften an:

- Das Schaubild von f hat Asymptoten mit den Gleichungen $x = 2$ und $y = 1$
- g ist periodisch mit der Periode π und hat den Wertebereich $[-3; 3]$

Lösung

- $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$, denn für $x \rightarrow \pm\infty$ strebt der echt gebrochenrationale Rest $\frac{1}{x-2}$ gegen Null und daher $f(x)$ gegen den ganzrationalen Hauptteil 1. f hat also die waagerechte Asymptote $y = 1$. Für $x \rightarrow 2$ dagegen strebt der Rest $\frac{1}{x-2}$ gegen ∞ . f hat also die senkrechte Asymptote $x = 2$.
- $f(x) = 3 \cdot \sin(2x)$ hat die Amplitude 3 und die Periodendauer $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$