4.8. Prüfungsaufgaben zu trigonometrischen Funktionen

Aufgabe 1: Schaubilder der trigonomtrischen Funktionen (8)

a) Zeichne den Graphen der Sinusfunktion im Bereich $0 \le x \le 2\pi$ und gib fünf verschiedene Funktionswerte exakt an. (4)

b) Zeichne den Graphen der Kosinusfunktion im Bereich $0 \le x \le 2\pi$ und gib fünf verschiedene Funktionswerte exakt an. (4)

Lösungen:

a) Siehe Skript mit sin(0°) = 0, sin(30°) = $\frac{1}{2}$, sin(45°) = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, sin(60°) = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und sin(90°) = 1. (4)

b) Siehe Skript mit cos(90°) = 1, cos(30°) = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, cos(45°) = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, cos(60°) = $\frac{1}{2}$ und cos(90°) = 0. (4)

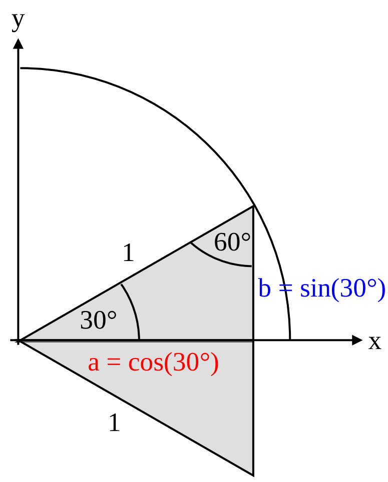
Aufgabe 2: Spezielle Funktionswerte (10)

a) Zeige mit Hilfe einer Zeichnung und einer Rechnung, dass cos(30°) = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und sin(30°) = $\frac{1}{2}$. (5)

b) Zeige mit Hilfe einer Zeichnung und einer Rechnung, dass cos(45°) = sin(45°) = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. (5)

Lösungen: (8)

a) Skizze (2) und Rechnung (3)



Für α = 30° ist das Dreieck **gleichseitig** mit

$$\boxed{\cos(60°) = \sin(30°) = b = \frac{1}{2}.}$$

Nach **Pythagoras** gilr

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow$$

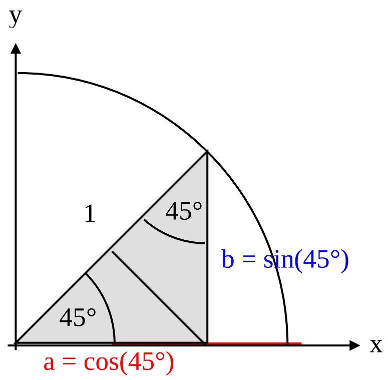
$$a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$a = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\sin(60°) = \cos(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

b) Skizze (2) und Rechnung (3)



Für α = 45° ist das Dreieck **gleichschenklig** mit sin(45°) = b = a = cos(45°). Nach **Pythagoras** gilt

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + a^2 = 1^2 \Leftrightarrow$$

$$2a^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

Aufgabe 3: Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen (6)

Vereinfache soweit wie möglich:

a) $\dfrac{\sqrt{(1-\sin(x))\cdot(1+\sin(x))}}{(\tan(x))^{-1}}$

b) $\dfrac{\tan(x)}{\sqrt{(1-\cos(x))\cdot(1+\cos(x))}}$

Lösungen:

a) $\dfrac{\sqrt{(1-\sin(x))\cdot(1+\sin(x))}}{(\tan(x))^{-1}} = \tan(x)\cdot\sqrt{1-(\sin(x))^2} = \tan(x)\cdot\cos(x) = \sin(x)$ (3)

b) $\dfrac{\tan(x)}{\sqrt{(1-\cos(x))\cdot(1+\cos(x))}} = \dfrac{\tan(x)}{\sqrt{1-(\cos(x))^2}} = \dfrac{\tan(x)}{\sin(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$ (3)

Aufgabe 4: Trigonometrische Gleichungen (3)

Für welche x mit $0 \le x \le 2\pi$ sind die folgenden Gleichungen erfüllt?

a) $\cos^2(x) - \frac{1}{2}\cos(x) = \frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{2}\sin(x) - \sin^2(x) = \frac{1}{2}$

c) $\sin^2(x)^2 + \sin(x) - 2 = 0$

d) $\sin(x)\cdot(\sin(x) + 3) = 0$

e) $\cos^2(x) - \cos(x) = 0$

f) $(\sin(x))^2 + \frac{3}{4} = \sqrt{3}\sin(x)$

Lösungen

a) Subst. $\cos(x) = z \Leftrightarrow z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \Rightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2}$ oder $\cos(x) = 1 \Rightarrow L = \{0; \frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi; 2\pi\}$ (3)

b) Subst. $\sin(x) = z \Leftrightarrow \frac{3}{2}z^2 - z - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4} \Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2}$ oder $\sin(x) = 1$ $\Rightarrow L = \{\frac{1}{6}\pi; \frac{1}{2}\pi; \frac{5}{6}\pi\}$ (3)

c) Substitution $\sin(x) = z \Rightarrow z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow z_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \sin(x) = -2$ oder $\sin(x) = 1 \Rightarrow L = \{\frac{\pi}{2}\}$ (3)

d) Substitution $\sin(x) = z \Rightarrow z\cdot(z + 3) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ oder $z = -3 \Leftrightarrow \sin(x) = -3$ oder $\sin(x) = 0 \Rightarrow L = \{0; \pi; 2\pi\}$ (3)

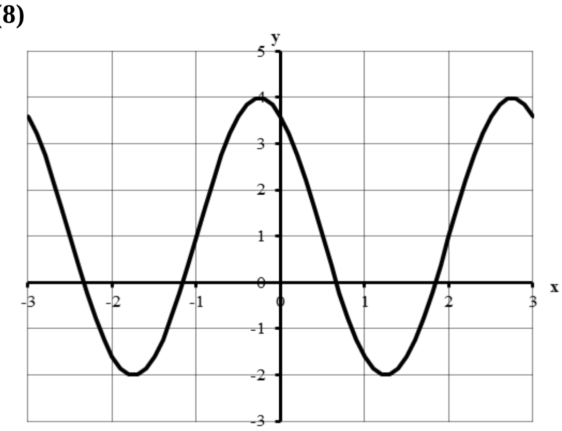
e) Substitution $\cos(x) = z \Leftrightarrow z(z - 1) = 0 \Rightarrow z = 0$ oder $z = 1 \Leftrightarrow \cos(x) = 0$ oder $\cos(x) = 1 \Rightarrow L = \{0; \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi; 2\pi\}$ (3)

f) $(\sin(x))^2 + \frac{3}{4} = \sqrt{3}\sin(x) \Leftrightarrow (\sin(x))^2 - \sqrt{3}\sin(x) + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow L = \{\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\}$ (4)

Aufgabe 5: Verschiebung und Streckung trigonometrischer. Funktionen (8)

a) Bestimme die Gleichung der rechts skizzierten Funktion. (4)

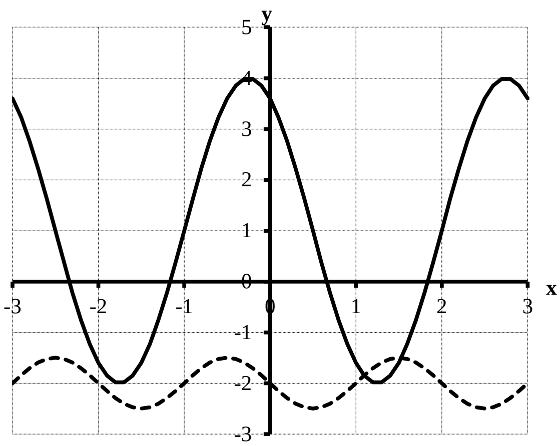
b) Zeichne den Graphen von $g(x) = \frac{1}{2}\sin[\pi(x - 1] - 2$ ebenfalls in das Koordinatensystem aus a). (4)



Lösung

a) $f(x) = 3\cdot\sin[\frac{2}{3}\pi(x + 1)] + 1$ (4)

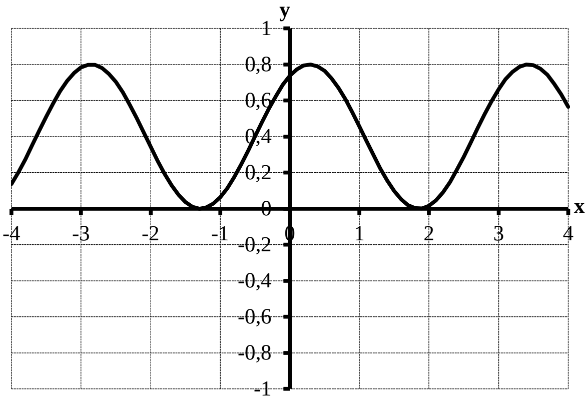
b) siehe Zeichnung (4)



Aufgabe 6: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (8)

a) Bestimme die Gleichung der rechts abgebildeten Funktion f. (4)

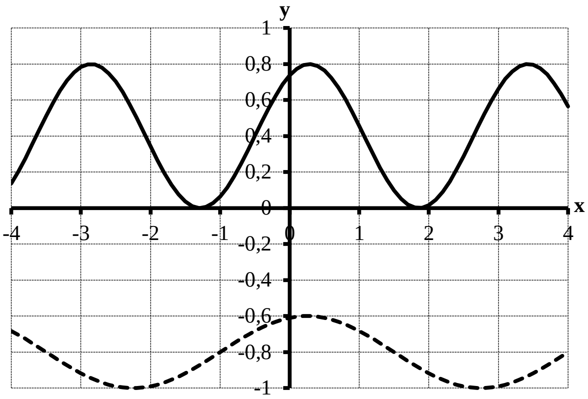
b) Zeichne den Graphen von g(x) = 0,2sin[0,4π(x + 1) – 0,8 ebenfalls in das Koordinatensystem aus a) (4)



Lösung

$f(x) = 0{,}4\sin[\frac{2\pi}{3}(x - 1) + 0{,}4$ (4)

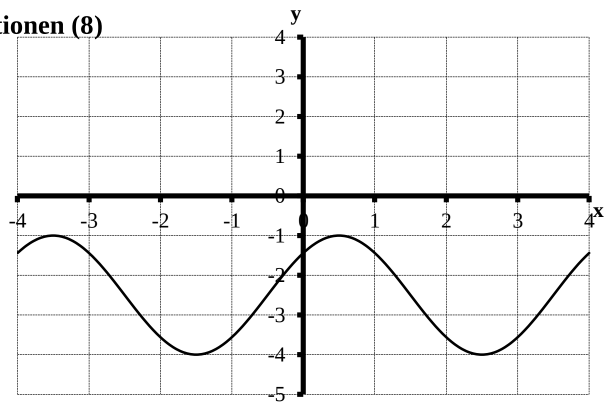
siehe rechts (4)



Aufgabe 7: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (8)

a) Gib die Gleichung der rechts skizzierten Funktion an (4)

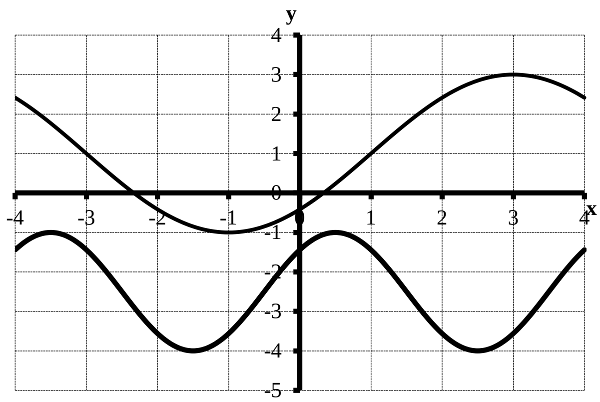
b) Skizziere den Graphen von $f(x) = 2\cdot\sin[\frac{\pi}{4}(x - 1)] + 1$ in das Koordinaten-system aus a) (4)



Lösung

a) $f(x) = \frac{3}{2}\cdot\sin[\frac{\pi}{2}(x + \frac{1}{2})] - \frac{5}{2}$. (4)

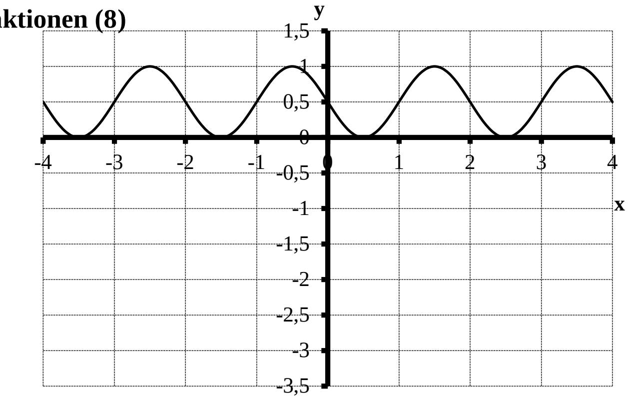
b) Skizze siehe rechts (4)



Aufgabe 8: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (8)

a) Gib die Gleichung der rechts skizzierten Funktion an (4)

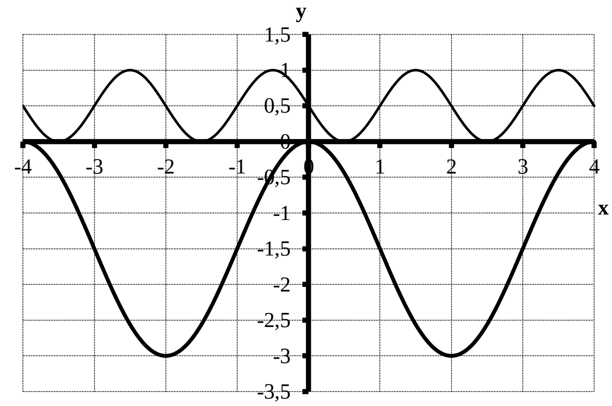
b) Skizziere den Graphen von $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin[\frac{\pi}{2}(x + 1)] - \frac{3}{2}$ in das Koordinatensystem aus a) (4)



Lösung

a) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin[\pi(x - 1)] + \frac{1}{2}$. (4)

b) Skizze siehe rechts. (4)



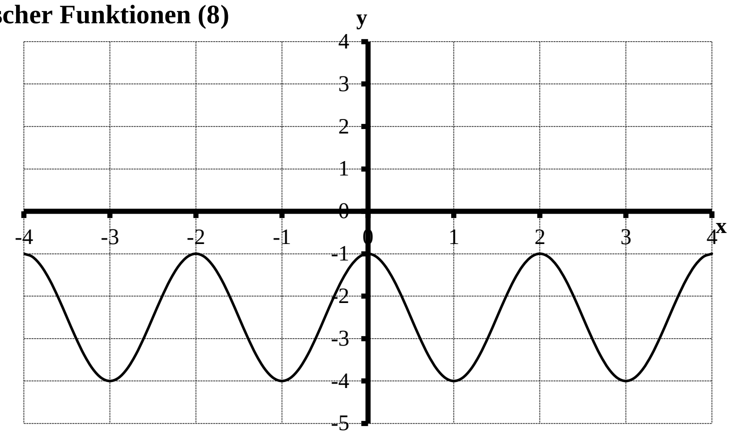
Aufgabe 9: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (8)

a) Gib die Gleichung der rechts skizzierten Funktion an (4)

b) Skizziere den Graphen von

$f(x) = 2 \cdot \sin[\frac{\pi}{3}(x - 1)] + 1$

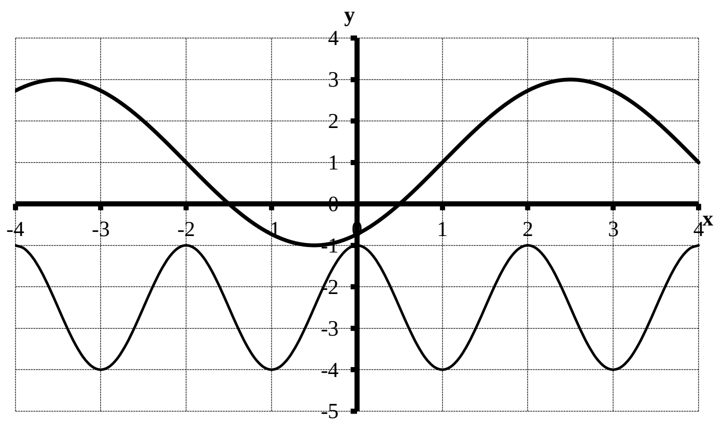
in das Koordinatensystem aus a) (4)



Lösung

a) $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin[\pi(x + \frac{1}{2})] - \frac{5}{2}$. (4)

b) Skizze siehe rechts. (4)



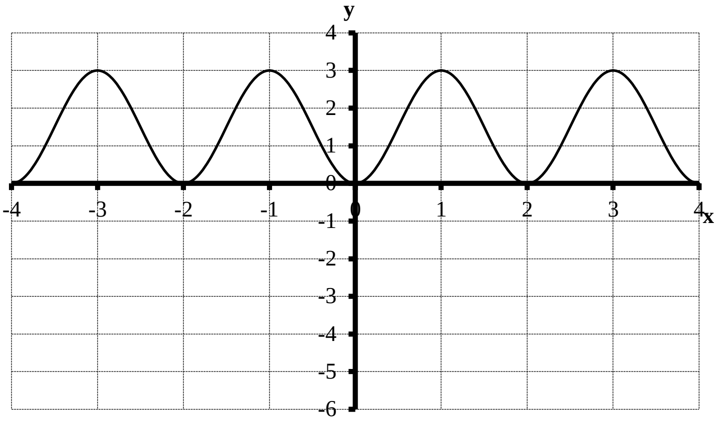
Aufgabe 10: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (8)

a) Gib die Gleichung der rechts skizzierten Funktion an (4)

b) Skizziere den Graphen von

$f(x) = 2\cdot\sin[\frac{\pi}{3}(x-2)] - 3$

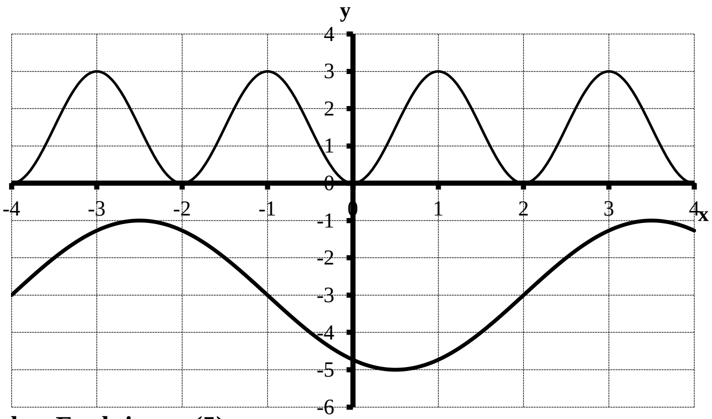
in das Koordinatensystem aus a) (4)



Lösung

a) $f(x) = \frac{3}{2}\cdot\sin[\pi(x - \frac{1}{2})] + \frac{3}{2}$. (4)

b) Skizze siehe rechts (4)



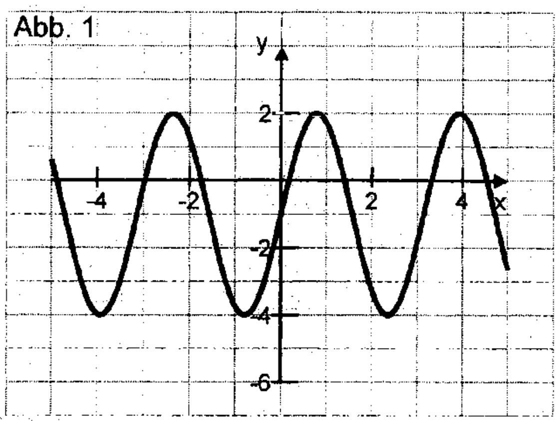
Aufgabe 11: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (5)

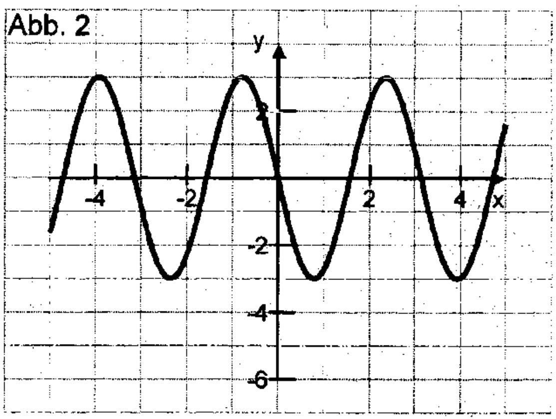
Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = -3\cdot\sin(2x) - 1$ sowie vier Graphen.

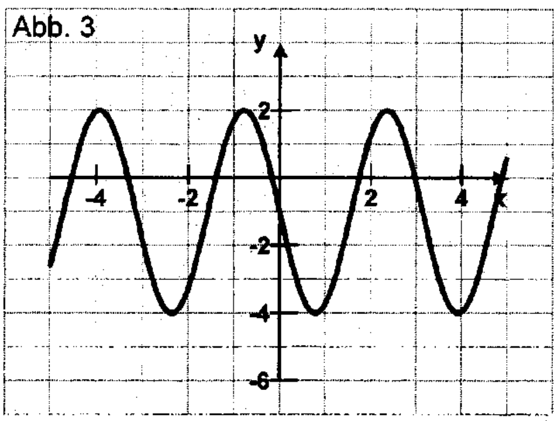
a) Geben Sie die charakteristischen Eigenschaften des Graphen von f an, die man ohne weitere Rechnung dem Funktionsterm entnehmen kann.

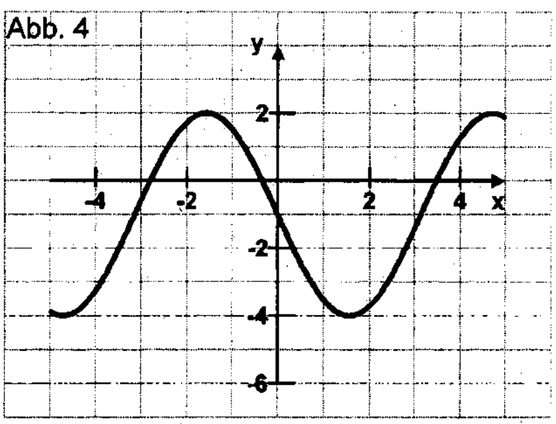
b) Welcher Graph gehört zu f?

c) Geben Sie zu jedem anderen Graphen mindestens eine Eigenschaft an, die mit den Funktionseigenschaften von f nicht vereinbar ist.









Lösung

a) Amplitude 3 LE wegen Faktor −3, Periode p = π wegen Faktor 2, Verschiebung um 1 LE nach unten wegen Summand −1 und Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts oder links bzw. Spiegelung an y = −1 wegen Faktor−3.

b) Abb. 1: $y = 3\cdot\sin(2x) - 1$ (falsche Phase)
Abb. 2: $y = 3\cdot\sin(2x)$ (fehlende Verschiebung)
Abb. 3: $f(x) = 3\cdot\sin(2x) - 1$ (richtiges Bild)
Abb. 4: $y = 3\cdot\sin(x) - 1$ (falsche Periode)

Aufgabe 12: Trigonometrische und rationale Funktionen im Vergleich (4)

Gegeben sind die Schaubilder von vier Funktionen jeweils mit sämtlichen Asymptoten:

Schaubild 1

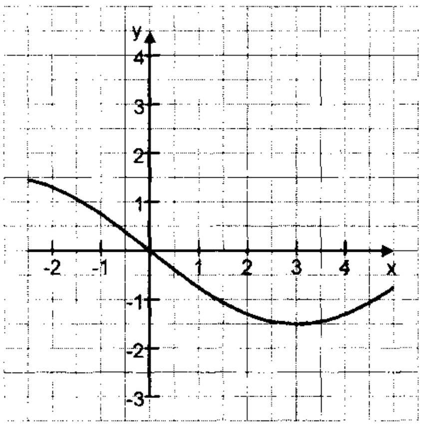


Schaubild 2

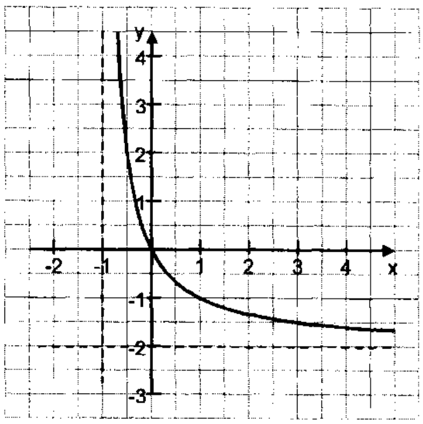


Schaubild 3

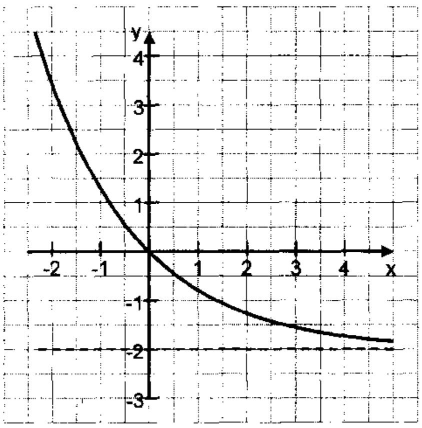
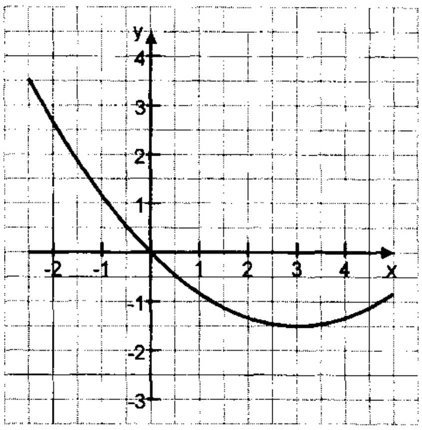


Schaubild 4



Drei dieser vier Schaubilder werden beschreiben durch die Funktionen f, g und h mit $f(x) = \frac{-2x}{x+a}$,
$g(x) = -2 + b\cdot e^{-0,5x}$ und $h(x) = c\cdot x^2 - x$.

a) Ordnen Sie den Funktionen f, g und h jeweils das passende Schaubild zu und begründen Sie. (3)

b) Bestimmen Sie die Werte für a und b. (2)

Lösung

a) f gehört zu Schaubild 2, da nur dieses Schaubild eine senkrechte Asymptote besitzt. g gehört zu Schaubild 3, da nur noch dieses Schaubild eine waagerechte Asymptote besitzt. h gehört zu Schaubild 4, da nur dieses Schaubild eine Parabel zweiter Ordnung zeigt.

b) Die senkrechte Asymptote x = -1 führt auf a = 1. g(0) = 0 führt auf b = 2.