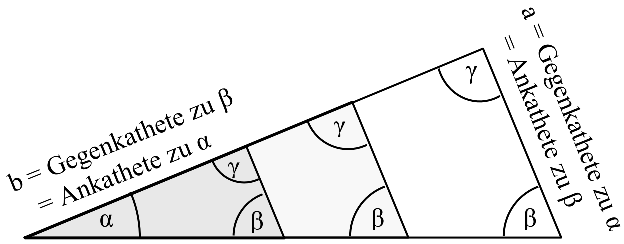
4.8. Trigonometrische Funktionen

4.8.1. Definitionen

Nach dem **Winkelsummensatz** ist in beliebigen Dreiecken $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, im **rechtwinkligen Dreieck** gilt wegen $\gamma = 90°$ daher $\alpha + \beta = 90°$.
In einem rechtwinkligen Dreieck werden die **Form** und nach dem **Strahlensatz** auch die **Seitenverhältnisse** also schon durch einen **einzigen** Winkel α **oder** β festgelegt.
Die folgenden Definitionen die **trigonometrischen Funktionen als Seitenverhältnisse** sind also eindeutig:



Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \cos(\beta)$ **Kosinus**: $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \sin(\beta)$ **Tangens**: $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{1}{\tan(\beta)}$

Um nun mit Hilfe der im Taschenrechner gespeicherten Winkelfunktionen alle Seiten und Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes zu berechnen, genügt die Angabe einer Seite und einer weiteren Größe (Seite oder Winkel).

Beispiel 1
Gegeben sind a = 4 cm und α = 40°. Berechne die restlichen Größen b, c und β.

Lösung
Winkelsumme: $\underline{\beta} = 90° - \alpha = \underline{50°}$

Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \underline{c} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{4\text{ cm}}{\sin(40°)} \approx \underline{6{,}22\text{ cm}}$

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \underline{b} = \sqrt{c^2 - a^2} \approx \underline{4{,}77\text{ cm}}$

Beispiel 2
Gegeben sind a = 5 cm und c = 8 cm. Berechne die restlichen Größen b, α und β.

Lösung
Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \underline{\alpha} = \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) \approx \underline{38{,}7°}$

Winkelsumme: $\underline{\beta} = 90° - \alpha = \underline{51{,}3°}$

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \underline{b} = \sqrt{c^2 - a^2} = \underline{\sqrt{39}\text{ cm}}$

Übungen. Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 1

4.8.2. Grundlegende Beziehungen

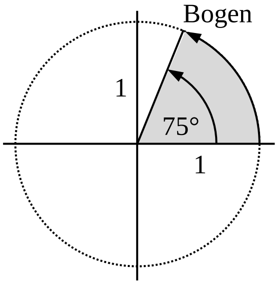
Satz
Im rechtwinkligen Dreieck ($0 \le \alpha, \beta \le 90°$) gelten die folgenden Beziehungen:
1. $\sin(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(90° - \alpha)$
2. $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{c}{c}\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
3. Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow [\sin(\alpha)]^2 + [\cos(\alpha)]^2 = 1$

Übungen. Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 2 - 5

4.8.3. Das Bogenmaß

Definition
Die zum Winkel α gehörenden Bogenlänge des Einheitskreises mit Radius r = 1 heißt **Bogenmaß** des Winkels. Eine volle Drehung von 360° entspricht dem Umfang 2πr = 2π des Einheitskreises. Eine halbe Umdrehung von 180° hat entsprechend die Bogenlänge π. Allgemein gilt für die Umrechnung von Grad (**Degree**) in Bogenmaß (**Radiant**):

$$\text{Winkel } \alpha \text{ in Bogenmaß} = \frac{\pi}{180} \cdot \text{Winkel } \alpha \text{ in Grad.}$$

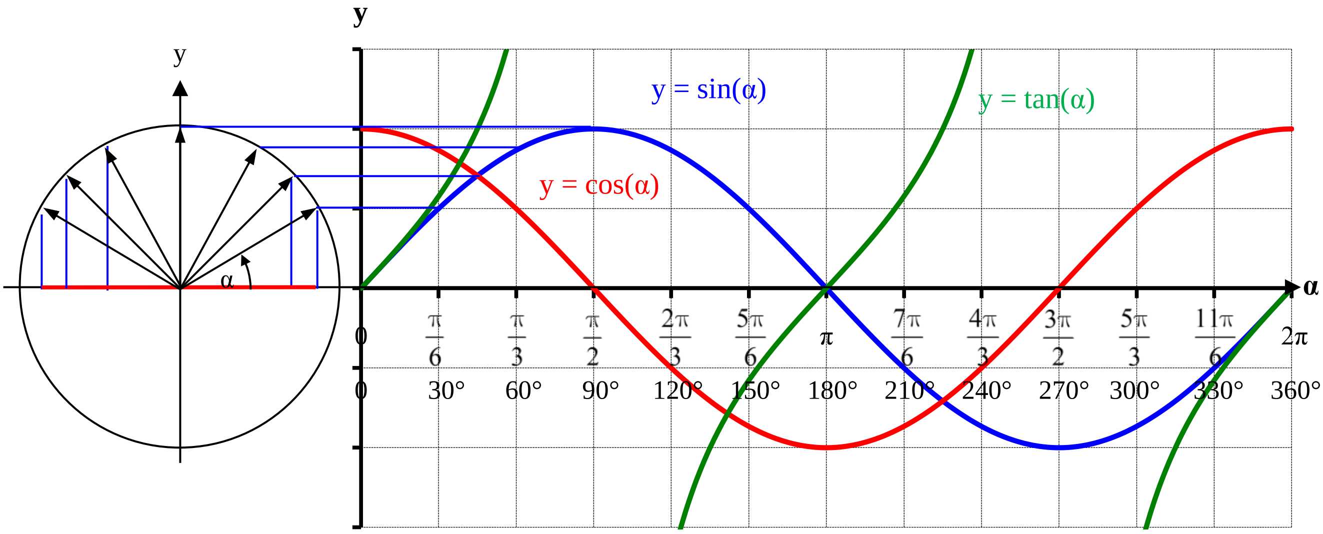


$$\text{Bogen} = \frac{\pi}{180°} \cdot 75° = \frac{5}{12}\pi \text{ Radiant}$$

Übungen: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 6

4.8.4. Schaubilder der trigonometrischen Funktionen

Definition
Sei P(x|y) der Endpunkt eines Zeigers von der Länge 1, der sich um den Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ von der positiven x-Achse aus nach links ($\alpha > 0$) oder rechts ($\alpha < 0$) gedreht hat. Dann definiert man die **Winkelfunktionen** sin(α) = y, cos(α) = x und $\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$

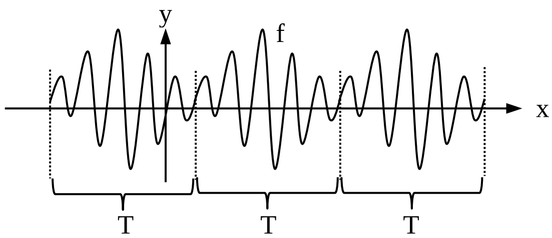


Beispiel: Schaubilder der trigonometrischen Funktionen Nr. 1

4.8.5. Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

Definition: Eine Funktion f heißt **periodisch** mit der **Periode** T, wenn sich ihr Verlauf nach jeweils dieser Periode T wiederholt, d.h., wenn

$$f(x) = f(x + T) \text{ für alle } x \in D.$$



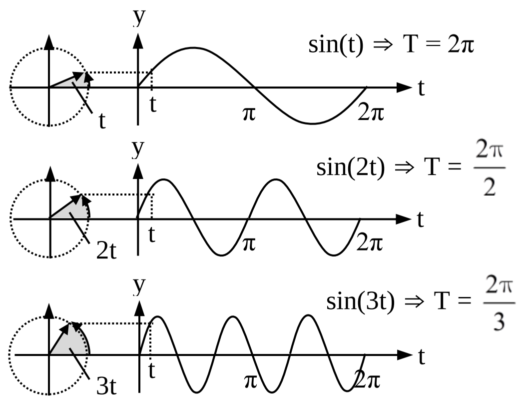
Beispiel: Schaubilder der trigonometrischen Funktionen Nr. 2

Funktion f(α) =	Symmetrie f(-α) =	Nachbarwinkel f(π - α) =	Periode T =	Definitionsbereich D =	Wertebereich W =
sin(α)	-f(α) (ungerade)	f(α)	2π	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$
cos(α)	f(α) (gerade)	-f(α)	2π	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$
tan(α)	-f(α) (ungerade)	-f(α)	π	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + z\cdot\pi : z \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$

4.8.6. Winkelgeschwindigkeit und Amplitude

Beispiele: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 7 a)

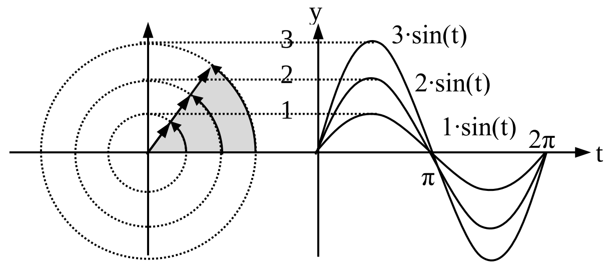
Winkelgeschwindigkeit und Periode
Der Zeiger dreht sich mit der konstanten **Winkelgeschwindigkeit** $\omega = \frac{\alpha}{t}$. Der Winkel zur Zeit t ist dann $\alpha = \omega\cdot t$ und der senkrechte Ausschlag des Zeigers wird zu $y(t) = \sin(\alpha) = \sin(\omega\cdot t)$.
Für eine volle Umdrehung um den Winkel $\alpha = 2\pi$ benötigt der Zeiger genau eine **Periode** T.
Die Winkelgeschwindigkeit ist also $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Je größer die Winkelgeschwindigkeit ω, desto schneller dreht sich der Zeiger und desto kürzer wird die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.



Beispiele: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 7 b)

Die Amplitude
Die Länge des Zeigers bestimmt den maximalen Ausschlag der Sinusfunktion und wird als **Amplitude (Verstärkung) A** bezeichnet.
Der Ausschlag eines Zeigers mit der Länge A und der Winkelgeschwindigkeit ω ist dann

$$y(t) = A\cdot\sin(\omega\cdot t)$$

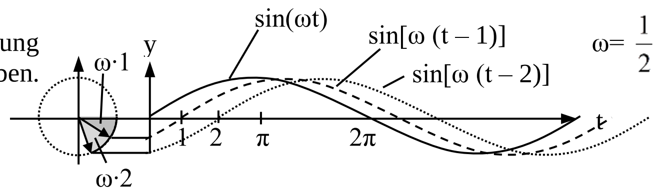


4.8.7. Ruhelage und Phase

Beispiele: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 7 c)

Die Phase
Wenn der Zeiger um die **Phase t_0** verspätet mit der Drehung beginnt, ist der Graph um t_0 in Richtung der t-Achse verschoben. Seine Gleichung ist dann

$$y(t) = A\cdot\sin[\omega(t - t_0)]$$

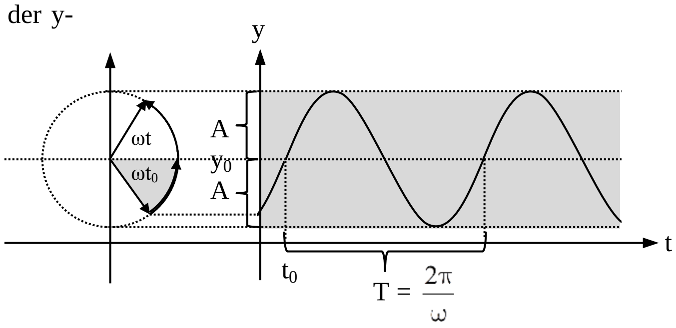


Beispiele: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 7 d)

Die Ruhelage
Wird der Zeiger vertikal in eine neue **Ruhelage y_0** verschoben, so verschiebt sich der Graph entsprechend um y_0 in Richtung der y-Achse. Seine Gleichung ist dann

$$y(t) = A\cdot\sin[\omega(t - t_0)] + y_0$$

mit
A = Amplitude = Zeigerlänge
ω = Winkelgeschwindigkeit des Zeigers
T = Periode = Dauer eines Umlaufs
t_0 = Phase = Verspätung des Zeigers
y_0 = vertikale Verschiebung des Zeigers

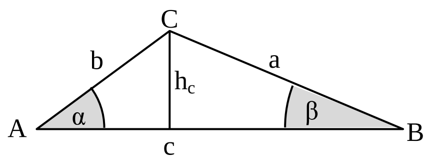


Übungen: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 8

4.8.8. Der Sinussatz

Sinussatz:
In beliebigen Dreiecken gilt $\dfrac{\sin(\alpha)}{a} = \dfrac{\sin(\beta)}{b} = \dfrac{\sin(\gamma)}{c}$.

Veranschaulichung:
Je größer der Winkel, desto länger die gegenüberliegende Seite.



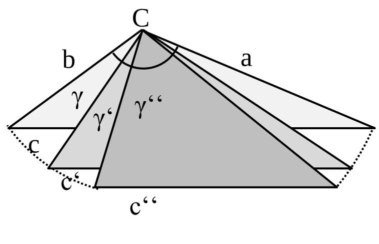
Beweis für spitze Winkel (für stumpfe Winkel mit sin(α) = sin(180° − α)):
$b\cdot\sin(\alpha) = h_c = a\cdot\sin(\beta) \Leftrightarrow b\cdot\sin(\alpha) = a\cdot\sin(\beta) \Leftrightarrow \dfrac{\sin(\alpha)}{a} = \dfrac{\sin(\beta)}{b}$.

Übungen: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 9 und 10

4.8.9. Der Kosinussatz:

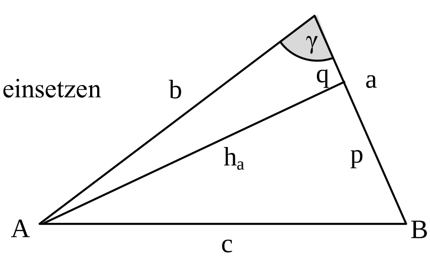
Kosinussatz
In beliebigen Dreiecken gilt $c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma)$

Veranschaulichung:
Der Kosinussatz ist die **Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras** für Winkel γ ≠ 90°:
a) Für **spitze** Winkel γ < 90° ist cos(γ) > 0
   ⇒ Korrekturglied $-2ab\cdot\cos(\gamma) < 0$,
   ⇒ c ist **kürzer** als bei Pythagoras. **(helles Dreieck)**
b) Für **rechte** Winkel γ = 90° ist cos(γ) = 0
   ⇒ Korrekturglied $-2ab\cdot\cos(\gamma) = 0$,
   Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$. **(mittleres Dreieck)**
c) Für **stumpfe** Winkel γ > 90° ist cos(γ) < 0
   ⇒ Korrekturglied $-2ab\cdot\cos(\gamma) > 0$,
   ⇒ c ist **länger** als bei Pythagoras **(dunkles Dreieck)**



Beweis für spitze Winkel (für stumpfe Winkel analog mit sin(α) = sin(180° − α)):

$$\begin{aligned}
c^2 &= h_a^2 + p^2 && | \; h_a = b\cdot\sin(\gamma) \text{ bzw. } p = a - q \text{ einsetzen}\\
&= (b\cdot\sin(\gamma))^2 + (a - q)^2 && | \text{ Klammern auflösen}\\
&= (b\cdot\sin(\gamma))^2 + a^2 - 2aq + q^2 && | \; q = b\cdot\cos(\gamma)\\
&= b^2\cdot(\sin(\gamma))^2 + a^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma) + b^2\cdot(\cos(\gamma))^2 && | \; b^2 \text{ ausklammern}\\
&= b^2\cdot[(\sin(\gamma))^2 + (\cos(\gamma))^2] + a^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma) && | \text{ Pythagoras}\\
&= a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma)
\end{aligned}$$



Übungen: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 11 und 12