

## 5.1. Aufgaben zu Grenzwerten und Stetigkeit

### Aufgabe 1: Grenzwerte für $x \rightarrow \pm \infty$

- a) Untersuchen Sie die Funktion  $f(x) = \frac{3x-3}{x+1}$  auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten, hebbare Lücken sowie Vorzeichenwechsel und zeichnen Sie eine Schaubildskizze.
- b) Von welchem  $x > 0$  an wird die Abweichung (= Differenz) zwischen  $f(x) = \frac{3x-3}{x+1}$  und ihrem Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  kleiner als  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\varepsilon = 0,001$  und  $\varepsilon = 10^{-6}$ ?

### Aufgabe 2: Grenzwerte für $x \rightarrow \pm \infty$

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf ihr Verhalten für gegen  $+\infty$  bzw.  $-\infty$  strebendes  $x$  und berechnen Sie, falls möglich, die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Geben Sie außerdem an, für welche  $x$  der Abstand  $|f(x) - a|$  kleiner als  $\varepsilon = 0,0001$  wird.

- a)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$       c)  $f(x) = \frac{3x^2-12}{x-1}$       e)  $f(x) = 2^x$       g)  $f(x) = \frac{2^x}{x^2}$       i)  $f(x) = x \cdot \sin x$
- b)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$       d)  $f(x) = \frac{3x^2-12}{x^2-1}$       f)  $f(x) = 2^{-x}$       h)  $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$       j)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

### Aufgabe 3: Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$

Untersuchen Sie die Funktion  $f$  auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten sowie hebbare Lücken und zeichnen Sie eine Schaubildskizze.

- a)  $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$       b)  $f(x) = \frac{2^x-4}{x-2}$

### Aufgabe 4: Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf ihr Verhalten für gegen  $x_0$  strebendes  $x$ . Berechnen Sie, falls möglich, den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

- a)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  für  $x_0 = 1$       g)  $f(x) = \frac{2^x-8}{x-3}$  für  $x_0 = 3$
- b)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  für  $x_0 = 1$       h)  $f(x) = \frac{1}{2^x}$  für  $x_0 = 0$
- c)  $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$  für  $x_0 = 2$       i)  $f(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^2}$  für  $x_0 = 0$
- d)  $f(x) = \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}$  für  $x_0 \in \mathbb{R}$       j)  $f(x) = \frac{x}{\log_2 x}$  für  $x_0 = 0$
- e)  $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{für } x < -1 \\ 3x+1 & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$  für  $x_0 = -1$       k)  $f(x) = x^2 \cdot \log_2(x^2)$  für  $x_0 = 0$
- f)  $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{für } x \leq 2 \\ -x+7 & \text{für } x > 2 \end{cases}$  für  $x_0 = 2$       l)  $f(x) = x^2 \cdot \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$  für  $x_0 = 0$

### Aufgabe 5: Stetigkeit

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

- a)  $f(x) = |x|$       c)  $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$       e)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ x^2-4x+4 & \text{für } x > 1 \end{cases}$
- b)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$       d)  $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{für } x \leq -2 \\ 2x-2 & \text{für } x > -2 \end{cases}$       f)  $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{für } x < -2 \\ \frac{1}{x-3} & \text{für } x \geq -2 \end{cases}$

**Aufgabe 6: Stetigkeit**

Bestimmen Sie  $t \in \mathbb{R}$  so, dass  $f$  an der Nahtstelle  $x_0$  stetig ist.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 8 & \text{für } x \leq 3 \\ \frac{1}{2x-t} & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 & \text{für } x < -1 \\ 2x^2 - 4tx + 2t^2 & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2tx - \frac{4t}{3} & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{x+t} & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{t}{2}x^2 + 2x - 5t & \text{für } x \leq 2 \\ -2x^2 + \frac{3t}{2}x & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

## 5.1. Lösungen zu den Aufgaben zu Grenzwerten und Stetigkeit

### Aufgabe 1: Grenzwerte für $x \rightarrow \pm \infty$

siehe Skript

### Aufgabe 2: Grenzwerte für $x \rightarrow \pm \infty$

- a)  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$  mit  $|f(x) - 0| < 0,0001$  für  $x < -9999$  oder  $x > 10001$
- b)  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$  mit  $|f(x) - 0| < 0,0001$  für  $x < -19999$  oder  $x > 20001$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - 3x) = 0 \Rightarrow$  schiefe Asymptote  $y = 3x$
- d)  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 3$  mit  $|f(x) - 3| < 0,0001$  für  $x < -\sqrt{90001}$  oder  $x > \sqrt{90001}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$  mit  $|f(x) - 0| < 0,0001$  für  $x < \log_2 0,0001 \approx -13,28$
- f)  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$  mit  $|f(x) - 0| < 0,0001$  für  $x > -\log_2 0,0001 \approx 13,28$
- g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  mit  $|f(x) - 0| < 0,0001$  für  $x < -7,48$
- h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  mit  $|f(x) - 0| < 0,0001$  für  $x > 22,23$
- i)  $f(x) \rightarrow \pm \infty$  für  $x \rightarrow \pm \infty$
- j)  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$  mit  $|f(x) - 0| < 0,0001$  für  $x < -10000$  oder  $x > 10000$

### Aufgabe 3: Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$

siehe Skript

### Aufgabe 4: Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$

- a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  mit **senkrechter Asymptote**  $x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  existiert nicht
- b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  mit **hebbarer Lücke**  $L(1|2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
- c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$  mit **hebbarer Lücke**  $L(2|12) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 12$
- d)  $D = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$  mit **hebbarer Lücke**  $L(x_0|3x_0^2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 3x_0^2$
- e)  $D = \mathbb{R}$  aber **Sprungstelle** bei  $x_0 = -1$  mit  $f(-1) = -2$  und  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1$
- f)  $D = \mathbb{R}$  ist **stetig** mit  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 5$
- g)  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$  mit **hebbarer Lücke**  $\approx L(3|5,545177) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 8 \cdot \ln(2) \approx 5,545177$
- h)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit **senkrechter Asymptote**  $x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert nicht
- i)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit **hebbarer Lücke**  $L(0|0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
- j)  $D = ]0; 1[ \cup ]1; \infty[$  mit  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$
- k)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit **hebbarer Lücke**  $L(0|0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
- l)  $D = ]0; \infty[$  mit  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

### Aufgabe 5: Stetigkeit

- a)  $f$  ist stetig auf  $D = \mathbb{R}$
- b)  $f = \text{sgn}(x)$  ist stetig auf  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- c)  $D = \mathbb{R}$  mit Sprungstelle bei  $x = 0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq 1 = f(0)$
- d)  $D = \mathbb{R}$  mit Sprungstelle bei  $x = -2$ :  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -6 \neq -5 = f(-2)$
- e)  $f$  ist stetig auf  $D = \mathbb{R}$  mit  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$
- f)  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$  mit Sprungstelle bei  $x = -2$  und senkrechter Asymptote bei  $x = 3$

### Aufgabe 6: Stetigkeit

- a)  $t = \frac{113}{19}$
- b)  $t_{1/2} = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$
- c)  $t = \frac{1}{4} \pm \frac{7}{4}$
- d)  $t = 2$