

## 5.2. Prüfungsaufgaben zu Tangentenproblemen

### Aufgabe 1a: Funktionsgleichung und Tangenten durch Punkte außerhalb der Kurve (8)

Welche Tangenten können durch  $P(1|-4)$  an die Parabel  $p$  gelegt werden, welche durch die Punkte  $A(1|0)$ ,  $B(4|3)$  und  $C(5|8)$  verläuft? Skizziere die Parabel und alle möglichen Tangenten in ein gemeinsames Koordinatensystem.

#### Lösungen

$$p(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)^2 - 1 \quad (2)$$

$$t_1(x) = 2x - 6 \text{ durch } B_1(3|0) \text{ und } t_2(x) = -6x + 2 \text{ durch } B_2(-1|8) \quad (4)$$

Zeichnung (2)

### Aufgabe 1b: Funktionsgleichung und Tangenten durch Punkte außerhalb der Kurve (8)

Welche Tangenten können durch  $P(-1|\frac{16}{3})$  an die Parabel  $p$  gelegt werden, welche durch die Punkte  $A(-2|2)$ ,  $B(3|-3)$  und  $C(4|-6)$  verläuft? Skizziere die Parabel und alle möglichen Tangenten in ein gemeinsames Koordinatensystem.

#### Lösungen

$$p(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 2 = -\frac{1}{3}(x + 1)^2 + \frac{7}{3} \quad (2)$$

$$t_1(x) = 2x + \frac{22}{3} \text{ durch } B_1(-4|\frac{2}{3}) \text{ und } t_2(x) = -2x + \frac{10}{3} \text{ durch } B_2(2|\frac{2}{3}) \quad (4)$$

Zeichnung (2)

### Aufgabe 1c: Funktionsgleichung und Tangenten durch Punkte außerhalb der Kurve (8)

Welche Tangenten können durch  $P(-1|\frac{16}{3})$  an die Parabel  $p$  gelegt werden, welche durch die Punkte  $A(-4|3)$ ,  $B(-3|\frac{1}{2})$  und  $C(-2|-1)$  verläuft? Skizziere die Parabel und alle möglichen Tangenten in ein gemeinsames Koordinatensystem.

#### Lösungen

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1 = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$t_1(x) = -x - \frac{5}{2} \text{ durch } B_1(-2|\frac{1}{2}) \text{ und } t_2(x) = x - \frac{1}{2} \text{ durch } B_2(0|\frac{1}{2}) \quad (4)$$

Zeichnung (2)

### Aufgabe 1d: Tangenten durch Punkte außerhalb der Kurve (8)

Bestimme die Gleichungen aller Tangenten, die durch  $P(0|7)$  an  $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$  gelegt werden können und zeichne alles in ein Koordinatensystem.

#### Lösungen

$$t_1(x) = -x + 7 \text{ durch } P(3|4) \text{ und } t_2(x) = -4x + 7 \text{ durch } B_2(\frac{3}{2}|1) \quad (4)$$

Zeichnung (4)

### Aufgabe 2a: Tangenten durch Punkte auf und außerhalb der Kurve (10)

- Zeige mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass die Parabel  $f(x) = 4x^2$  an der Stelle  $x_0 = 2$  die Steigung 16 hat. (3)
- Bestimme die Gleichung der Tangenten an der Parabel  $f(x) = 4x^2$  an der Stelle  $x_0 = 2$ . (1)
- Welche Tangenten können durch den Punkt  $P(1|-32)$  an die Parabel  $f(x) = 4x^2$  gelegt werden? (6)

#### Lösungen

$$a) f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 16}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} 4(x + 2) = 4(2 + 2) = 16 \quad (3)$$

$$b) t(x) = 16x - 16 \quad (1)$$

$$c) \frac{f(x) - (-32)}{x - 1} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{4x^2 + 32}{x - 1} = 8x \Leftrightarrow 4x^2 + 32 = 8x^2 - 8x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow t_1(x) = -16x - 16 \text{ durch } B_1(-2 \mid 16) \text{ und } t_2(x) = 32x - 64 \text{ durch } B_2(4 \mid 64) \quad (4)$$

### Aufgabe 2b: Tangenten durch Punkte auf und außerhalb der Kurve (10)

a) Zeige mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass die Parabel  $f(x) = 3x^2$  an der Stelle  $x_0 = 3$  die Steigung 18 hat. (3)

b) Bestimme die Gleichung der Tangenten an der Parabel  $f(x) = 3x^2$  an der Stelle  $x_0 = 3$ . (1)

c) Welche Tangenten können durch den Punkt  $P(2 \mid -36)$  an die Parabel  $f(x) = 3x^2$  gelegt werden? (6)

### Lösungen

$$a) f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} 3(x + 3) = 3(3 + 3) = 18 \quad (3)$$

$$b) t(x) = 18x - 27 \quad (1)$$

$$c) \frac{f(x) - (-36)}{x - 2} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 36}{x - 2} = 6x \Leftrightarrow 3x^2 + 36 = 6x^2 - 12x \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow t_1(x) = -12x - 12 \text{ durch } B_1(-2 \mid 12) \text{ und } t_2(x) = 36x - 108 \text{ durch } B_2(6 \mid 108) \quad (4)$$

### Aufgabe 3: Tangenten durch Punkte auf der Kurve (6)

Bestimme die Gleichung der Tangente, die am Schaubild der Funktion  $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x$  an der Stelle  $x_0 = 3$  angelegt werden kann.

### Lösung

$$\text{Berührungspunkt } P(3 \mid f(3)) = P(3 \mid 0) \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1 \Rightarrow \text{Steigung } a = f'(3) = 2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow t(x) = 2x - 6 \quad (1)$$

### Aufgabe 4: Tangenten durch Punkte auf der Kurve (6)

Bestimme die Gleichung der Tangente, die am Schaubild der Funktion  $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - 2x^2$  an der Stelle  $x_0 = -2$  angelegt werden kann.

### Lösung

$$\text{Berührungspunkt } P(-2 \mid f(-2)) = P(-2 \mid -7) \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 4x \Rightarrow \text{Steigung } a = f'(-2) = 6 \quad (1)$$

$$\Rightarrow t(x) = 6x + 5 \quad (1)$$

### Aufgabe 5: Tangenten durch Punkte auf der Kurve (3)

Bestimme die Gleichung der Tangente, die man an der Stelle  $x_0 = \frac{2}{3}\pi$  an dem Schaubild von  $f(x) = \sin(x)$  anlegen kann.

### Lösung

$$t(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad (3)$$

### Aufgabe 6: Tangenten durch Punkte auf der Kurve (3)

Bestimme die Gleichung der Tangente, die man an der Stelle  $x_0 = \frac{4}{3}\pi$  an dem Schaubild von  $f(x) = \sin(x)$  anlegen kann.

### Lösung

$$t(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad (3)$$

**Aufgabe 7: Wendetangenten (7)**

Bestimme die Gleichungen der Tangenten an den Wendepunkten von  $f(x) = \frac{9}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^3$ .

**Lösung:**

$$\text{Ableitungen } f'(x) = \frac{9}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 \text{ und } f''(x) = \frac{27}{4}x^2 + 9x = 9x\left(\frac{3}{4}x + 1\right) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \text{Wendetangenten } t_1(x) = 0 \text{ durch } W_1(0|0) \text{ und } t_2(x) = \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} \text{ durch } W_2\left(-\frac{4}{3} \mid -\frac{16}{9}\right) \quad (3)$$

**Aufgabe 8: Wendetangenten (7)**

Bestimme die Gleichungen der Tangenten an den Wendepunkten von  $f(x) = \frac{9}{4}x^4 + 3x^3$ .

**Lösung:**

$$\text{Ableitungen } f'(x) = 9x^3 + 9x^2 \text{ und } f''(x) = 27x^2 + 18x = 18x\left(\frac{3}{2}x + 1\right) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \text{Wendetangenten } t_1(x) = 0 \text{ durch } W_1(0|0) \text{ und } t_2(x) = \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} \text{ durch } W_2\left(-\frac{2}{3} \mid -\frac{4}{9}\right) \quad (3)$$

**Aufgabe 9: Wendetangenten (7)**

Bestimme die Gleichungen der Tangenten an den Wendepunkten von  $f(x) = \frac{9}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^3$ .

**Lösung:**

$$\text{Ableitungen } f'(x) = \frac{9}{8}x^3 - \frac{9}{4}x^2 \text{ und } f''(x) = \frac{27}{8}x^2 - \frac{9}{2}x = \frac{9}{2}x\left(\frac{3}{4}x - 1\right) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \text{Wendetangenten } t_1(x) = 0 \text{ durch } W_1(0|0) \text{ und } t_2(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{9} \text{ durch } W_2\left(\frac{4}{3} \mid -\frac{8}{9}\right) \quad (3)$$

**Aufgabe 10: Wendetangenten mit Parameter (5)**

Zeige, dass sich alle Wendetangenten von  $f_t(x) = \frac{1}{t^3} \cdot (x^3 - 3tx^2 + 4t^3)$  für  $t > 0$  in einem Punkt schneiden.

**Lösung:**

$$\text{Ableitungen: } f_t(x) = \frac{1}{t^3}(x^3 - 3tx^2 + 4t^3), f_t'(x) = \frac{1}{t^3}(3x^2 - 6tx), f_t''(x) = \frac{1}{t^3}(6x - 6t) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \text{Wendepunkte: } (f_t''(x) = 0 \text{ mit VZW}) W_t(t|2) \text{ mit Wendetangente } y = -\frac{3}{t}x + 5. \quad (2)$$

$$\text{Alle Wendetangenten schneiden die } y\text{-Achse in } S(5|0).. \quad (1)$$

**Aufgabe 11: Tangenten mit vorgegebener Steigung (6)**

Gegeben ist die Parabel  $f(x) = 2x^2 - 18x + 9$

- Gib die Gleichungen aller Tangenten mit der Steigung  $-2$  an, die an das Schaubild von  $f$  gelegt werden können. (3)
- Berechne die Koordinaten des Scheitelpunktes von  $f$  mit Hilfe der Ableitung. (3)

**Lösungen**

$$\text{a) } f'(x) = -2 \Leftrightarrow 4x - 18 = -2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \text{Berührungspunkt } P(4|f(4)) = P(4|-31) \Rightarrow t(x) = -2x - 23 \quad (3)$$

$$\text{b) } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2} \Rightarrow \text{Scheitelpunkt } S\left(\frac{9}{2} \mid f\left(\frac{9}{2}\right)\right) = S\left(\frac{9}{2} \mid -\frac{63}{2}\right) \quad (3)$$

**Aufgabe 12: Tangenten mit vorgegebener Steigung (6)**

Gegeben ist die Parabel  $f(x) = -2x^2 + 18x - 9$

- Gib die Gleichungen aller Tangenten mit der Steigung  $2$  an, die an das Schaubild von  $f$  gelegt werden können. (3)

d) Berechne die Koordinaten des Scheitelpunktes von  $f$  mit Hilfe der Ableitung. (3)

**Lösungen:**

a)  $f'(x) = 2 \Leftrightarrow -4x + 18 = 2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \text{Berührungspunkt } P(4|f(4)) = P(4|31) \Rightarrow t(x) = 2x + 23$  (3)

b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2} \Rightarrow \text{Scheitelpunkt } S\left(\frac{9}{2} \mid f\left(\frac{9}{2}\right)\right) = S\left(\frac{9}{2} \mid \frac{63}{2}\right)$  (3)

**Aufgabe 13: Tangenten mit vorgegebener Steigung (4)**

Bestimme die Gleichungen aller Tangenten mit der Steigung 3, die an das Schaubild der Funktion  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 1$  angelegt werden können.

**Lösung**

$f'(x) = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 5 = 3 \Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Berührungspunkt } P(1|f(1)) = P\left(1 \mid \frac{8}{3}\right) \Rightarrow t(x) = 3x - \frac{1}{3}$ . (4)

**Aufgabe 14: Tangenten mit vorgegebener Steigung (4)**

Bestimme die Gleichungen aller Tangenten mit der Steigung 3, die an das Schaubild der Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 + 3x$  angelegt werden können.

**Lösungen**

$f'(x) = 3 \Leftrightarrow 2x^3 - 2x^2 + 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow 2x(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Berührungspunkt } P(0|f(0)) = P(0|0) \Rightarrow t(x) = 3x$  (4)

**Aufgabe 15: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (6)**

Bestimme die Gleichungen **aller** Tangenten  $t(x)$ , die durch den Punkt  $P(0|0)$  an das Schaubild der Funktion

$f(x) = -\frac{x^2}{4}(x - 6)$  gelegt werden können.

**Lösungen:**

$t(x) = 0$  mit Berührungspunkt  $P(0|0)$  (3)

$t(x) = \frac{9}{4}x$  mit Berührungspunkt  $P\left(3 \mid \frac{27}{4}\right)$  (3)

**Aufgabe 16: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (6)**

Bestimme die Gleichungen **aller** Tangenten  $t(x)$ , die durch den Punkt  $P(6|0)$  an das Schaubild der Funktion

$f(x) = -\frac{x^2}{4}(x - 6)$  gelegt werden können.

**Lösung**

$t(x) = 0$  mit Berührungspunkt  $P(0|0)$  und (3)

$t(x) = -9x + 54$  mit Berührungspunkt  $P(6|0)$  (3)

**Aufgabe 17: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (6)**

Bestimme die Gleichungen aller Tangenten  $t(x)$ , die durch den Punkt  $P(0|4)$  an das Schaubild der Funktion

$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$  gelegt werden können.

**Lösung**

$t(x) = -4x + 4$  mit Berührungspunkt  $P(1|0)$  (3)

$t(x) = \frac{11}{4}x + 4$  mit Berührungspunkt  $P\left(-\frac{1}{2} \mid \frac{21}{8}\right)$  (3)

**Aufgabe 18: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (6)**

Bestimme die Gleichungen aller Tangenten  $t(x)$ , die durch den Punkt  $P(0|6)$  an das Schaubild der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4 \text{ gelegt werden können.}$$

**Lösung**

$$t_1(x) = -3x + 6 \text{ mit Berührungspunkt } B_1(2|0) \quad (3)$$

$$t_2(x) = \frac{15}{4}x + 6 \text{ und Berührungspunkt } B_2(-1|\frac{9}{4}). \quad (3)$$

**Aufgabe 19: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (6)**

Bestimme die Gleichungen aller Tangenten  $t(x)$ , die durch den Punkt  $P(1|-\frac{1}{2})$  an das Schaubild der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x \text{ gelegt werden können.}$$

**Lösung**

$$t(x) = -\frac{1}{2}x \text{ mit Berührungspunkt } P(0|0) \quad (3)$$

$$t(x) = \frac{23}{8}x - \frac{27}{8} \text{ mit Berührungspunkt } P(\frac{3}{2}|\frac{15}{16}) \quad (3)$$

**Aufgabe 20: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (8)**

Welche Tangenten können durch  $P(-\frac{2}{3}|-1)$  an das Schaubild von  $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x$  gelegt werden?

**Lösung**

$$\text{Ansatz } \frac{f(x) - y_0}{x - x_0} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{6}x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x + 1}{x + \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{3}x^2 + \frac{17}{6}x + 1 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{3}x(x^2 + 4x + 4) = \frac{1}{3}x(x + 2)^2 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow t_1(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{4}{3} \text{ an } P_1(-2|-\frac{1}{3}) \text{ und } t_2(x) = \frac{3}{2}x \text{ an } P_2(0|0) \quad (3)$$

**Aufgabe 21: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (8)**

Welche Tangenten können durch  $P(\frac{2}{3}|1)$  an das Schaubild von  $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x$  gelegt werden?

**Lösung**

$$\text{Ansatz } \frac{f(x) - y_0}{x - x_0} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x - 1}{x - \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{17}{6}x - 1 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{3}x(x^2 - 4x + 4) = \frac{1}{3}x(x - 2)^2 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow t_1(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{4}{3} \text{ an } P_1(2|\frac{1}{3}) \text{ und } t_2(x) = \frac{3}{2}x \text{ an } P_2(0|0) \quad (3)$$

**Aufgabe 22: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (8)**

Vom Punkt  $P(0|5)$  aus werden Tangenten an das Schaubild von  $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$  gelegt. Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Tangenten und die Koordinaten der Berührungspunkte. (8)

**Lösung**

$$\frac{f(x)-5}{x-0} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4 - 5}{x} = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 1 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \text{Tangenten } t_1(x) = -\frac{3}{2}x + 5 \text{ mit } B_1(2|2) \text{ und } t_2(x) = -\frac{15}{8}x + 5 \text{ mit } B_2(-1|\frac{25}{8}). \quad (4)$$

**Aufgabe 22: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (8)**

Vom Punkt  $P(0|-5)$  aus werden Tangenten an das Schaubild von  $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4$  gelegt. Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Tangenten und die Koordinaten der Berührungspunkte. (8)

**Lösung**

$$\frac{f(x)+5}{x-0} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4 + 5}{x} = \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 1 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \text{Tangenten } t_1(x) = -\frac{3}{2}x - 5 \text{ mit } B_1(-2|-2) \text{ und } t_2(x) = -\frac{15}{8}x - 5 \text{ mit } B_2(1|-\frac{25}{8}). \quad (4)$$

**Aufgabe 23: Tangenten durch vorgegebenen Schnittpunkt auf der Kurve (8)**

Bestimme die Gleichung der Tangente, die durch den Punkt  $P(0|0)$  an einen **weiteren** Punkt des Schaubildes von  $f(x) = \frac{9}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^3$  angelegt werden kann

**Lösung:**

$$\frac{f(x)-0}{x-0} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{9}{16}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = \frac{9}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 \Leftrightarrow \frac{27}{16}x^3 + 3x^2 = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -\frac{16}{9} \Rightarrow t_1(x) = 0 \text{ und } t_2(x) = \frac{128}{81}x \quad (3)$$

**Aufgabe 24: Tangenten durch vorgegebenen Schnittpunkt auf der Kurve (8)**

Bestimme die Gleichung der Tangente, die durch den Punkt  $P(0|0)$  an einen **weiteren** Punkt des Schaubildes von  $f(x) = \frac{9}{4}x^4 + 3x^3$  angelegt werden kann

**Lösung:**

$$\frac{f(x)-0}{x-0} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{9}{4}x^3 + 3x^2 = 9x^3 + 9x^2 \Leftrightarrow \frac{27}{4}x^3 + 6x^2 = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -\frac{8}{9} \Rightarrow t_1(x) = 0 \text{ und } t_2(x) = \frac{64}{81}x \quad (3)$$

**Aufgabe 25: Tangenten durch vorgegebenen Schnittpunkt auf der Kurve (8)**

Bestimme die Gleichung der Tangente, die durch den Punkt  $P(0|0)$  an einen **weiteren** Punkt des Schaubildes von  $f(x) = \frac{9}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^3$  angelegt werden kann

**Lösung:**

$$\frac{f(x)-0}{x-0} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{9}{32}x^3 - \frac{3}{4}x^2 = \frac{9}{8}x^3 - \frac{9}{4}x^2 \Leftrightarrow \frac{27}{32}x^3 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = \frac{16}{9} \Rightarrow t_1(x) = 0 \text{ und } t_2(x) = -\frac{64}{81}x \quad (3)$$

**Aufgabe 26: Tangenten mit vorgegeben Steigung und durch Punkte außerhalb der Kurve (9)**

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

- Bestimme den Tiefpunkt des Schaubildes von  $f$  mit Hilfe der 1. Ableitung. (2)
- Bestimme die Gleichung der Tangente mit der Steigung 1, die an das Schaubild von  $f$  gelegt werden kann. (3)
- Bestimme die Gleichung **aller** Tangenten, die durch den Punkt  $P(1|-1)$  an das Schaubild von  $f$  gelegt werden können. (4)

**Lösung**

a)  $f'(x) = x - 2 = 0 \Rightarrow T(2|-1)$  (2)

b)  $f'(x) = x - 2 = 1 \Rightarrow B_1(3|-\frac{1}{2})$  mit  $t_1(x) = x - \frac{7}{2}$  (3)

c)  $\frac{f(x)+1}{x-1} = f'(x) \Rightarrow t_1(x) = -2x + 1$  mit  $B_2(0|1)$  und  $t_3(x) = -1$  mit  $B_3(2|-1)$  (4)

**Aufgabe 27: Tangenten mit vorgegeben Steigung und durch Punkte außerhalb der Kurve (9)**

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

- Bestimme den Tiefpunkt des Schaubildes von  $f$  mit Hilfe der 1. Ableitung. (2)
- Bestimme die Gleichung der Tangente mit der Steigung 1, die an das Schaubild von  $f$  gelegt werden kann. (3)
- Bestimme die Gleichung **aller** Tangenten, die durch den Punkt  $P(-1|1)$  an das Schaubild von  $f$  gelegt werden können. (4)

**Lösung**

a)  $f'(x) = x + 2 = 0 \Rightarrow T(-2|1)$  (2)

b)  $f'(x) = x + 2 = 1 \Rightarrow B_1(-1|\frac{3}{2})$  mit  $t_1(x) = x + \frac{5}{2}$  (3)

c)  $\frac{f(x)-1}{x+1} = f'(x) \Rightarrow t_1(x) = 2x + 3$  mit  $B_2(0|3)$  und  $t_3(x) = 1$  mit  $B_3(-2|1)$  (4)

**Aufgabe 28: Tangenten mit vorgegeben Steigung und durch Punkte außerhalb der Kurve (9)**

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x$

- Bestimme den Tiefpunkt des Schaubildes von  $f$  mit Hilfe der 1. Ableitung. (2)
- Bestimme die Gleichung der Tangente mit der Steigung  $-2$ , die an das Schaubild von  $f$  gelegt werden kann. (3)
- Bestimme die Gleichung **aller** Tangenten, die durch den Punkt  $P(0|1)$  an das Schaubild von  $f$  gelegt werden können. (4)

**Lösung**

a)  $f'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Rightarrow T(2|1)$  (2)

b)  $f'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 = -2 \Rightarrow B_1(6|-3)$  mit  $t_1(x) = -2x + 9$  (3)

c)  $\frac{f(x)-1}{x} = f'(x) \Rightarrow t_1(x) = 2x + 1$  mit  $B_2(-2|-3)$  und  $t_3(x) = 1$  mit  $B_3(2|1)$  (4)

**Aufgabe 29: Tangenten mit Parameter (4)**

Bestimme die Gleichungen der Tangenten  $g_t$ , die am Schaubild von  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  durch den Punkt  $P(0|-t)$  mit  $t > 0$  angelegt werden können.

**Lösung**

Ansatz  $\frac{0,5x^2+t}{x} = x \Rightarrow g_t(x) = \pm\sqrt{2t} \cdot x - t$  mit Berührungspunkt  $B_t(\pm\sqrt{2t} | 2t)$  (4)

**Aufgabe 30: Tangenten mit Parameter (4)**

Bestimme die Gleichungen der Tangenten  $g_t$ , die am Schaubild von  $f(x) = -x^2$  durch den Punkt  $P(0|t)$  mit  $t > 0$  angelegt werden können.

**Lösung**

$$\text{Ansatz } \frac{-x^2 - t}{x} = -2x \Rightarrow g_t(x) = \pm 2\sqrt{t} \cdot x + t \text{ mit Berührungspunkt } B_t(\pm\sqrt{t} | -t) \quad (4)$$

**Aufgabe 31: Tangenten an Kurvenscharen (4)**

Für welche  $t$  hat  $f_t(x) = x^3 - x^2 + (t^2 - t)x + 5$  an der Stelle  $x = 0$  einen Hoch- oder Tiefpunkt?

**Lösung**

$$f_t'(x) = 3x^2 - 2x + t^2 - t \text{ mit } f_t'(0) = t^2 - t = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \text{ und } t_2 = 1 \quad (4)$$

**Aufgabe 32: Tangenten an Kurvenscharen (4)**

Für welche  $t$  hat  $f_t(x) = 2x^3 - 3x^2 + (t^2 + t)x + 5$  an der Stelle  $x = 1$  einen Hoch- oder Tiefpunkt?

**Lösung**

$$f_t'(x) = 6x^2 - 6x + t^2 + t \text{ mit } f_t'(1) = t^2 + t = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \text{ und } t_2 = -1 \quad (4)$$

**Aufgabe 33: Wendetangente mit Parameter (4)**

Zeigen Sie, dass sich alle Wendetangenten von  $f_t(x) = \frac{1}{t^3}(x^3 - 3tx^2 + 4t^3)$  in einem Punkt schneiden.

**Lösung**

$$\text{Alle Tangenten } g_t(x) = -\frac{3}{t}x - 5 \text{ durch } W_t(-t|-2) \text{ schneiden die } y\text{-Achse in } S(0|-5) \quad (4)$$

**Aufgabe 34: Wendetangente mit Parameter (4)**

Zeigen Sie, dass sich alle Wendetangenten von  $f_t(x) = \frac{1}{t^3}(x^3 + 3tx^2 - 4t^3)$  in einem Punkt schneiden.

**Lösung**

$$\text{Alle Tangenten } g_t(x) = -\frac{3}{t}x + 5 \text{ durch } W_t(t|2) \text{ schneiden die } y\text{-Achse in } S(0|5) \quad (4)$$