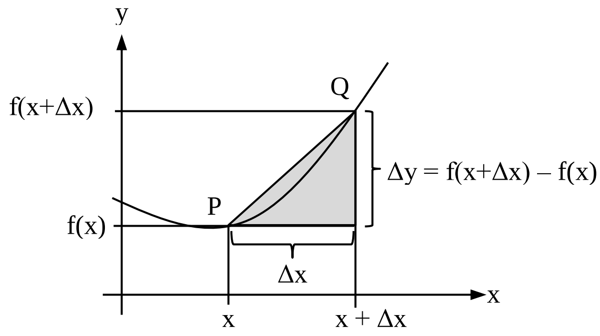
5.2. Differentialrechnung

5.2.1. Die mittlere Steigung einer Funktion zwischen zwei Punkten

Die **mittlere Steigung**der Funktion f(x) zwischen zwei Punkten P(x|f(x)) und Q(x + Δx|f(x + Δx)) ist definiert als

der **Differenzenquotient**

$$\frac{\text{Änderung in y}}{\text{Änderung in x}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Sie kann auch als **mittlereÄnderungsrate** gedeutet werden, wenn x für die Zeit steht, insbesondere bei der

mittleren Geschwindigkeit v = $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\text{Änderung des Ortes}}{\text{Änderung der Zeit}}$

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 1

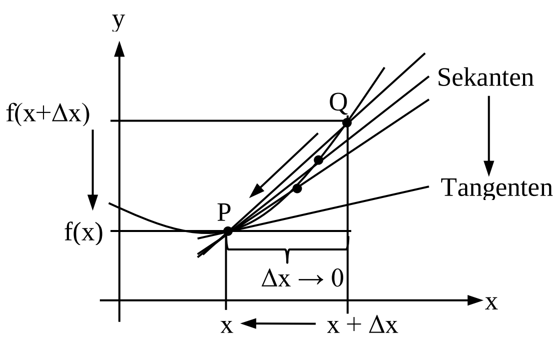
5.2.2. Die momentane Steigung einer Funktion in einem Punkt

Die **momentane Steigung** oder **Ableitung** f'(x) einer Funktion f(x) im Punkt P(x|f(x)) ist definiert als die Steigung der Tangente an y = f(x) in P.

Graphisch kann diese Tangente durch Sekanten durch die Punkte P(x|f(x) und Q(x + Δx)|f(x + Δx)) angenähert warden, wenn Q immer näher an P heranrückt.

Rechnerisch ist die Steigung der Tangente der Grenzwert der Sekantensteigungen für Δx → 0:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$



Die Ableitung wird häufig auch in **Differentialschreibweise** dargestellt:

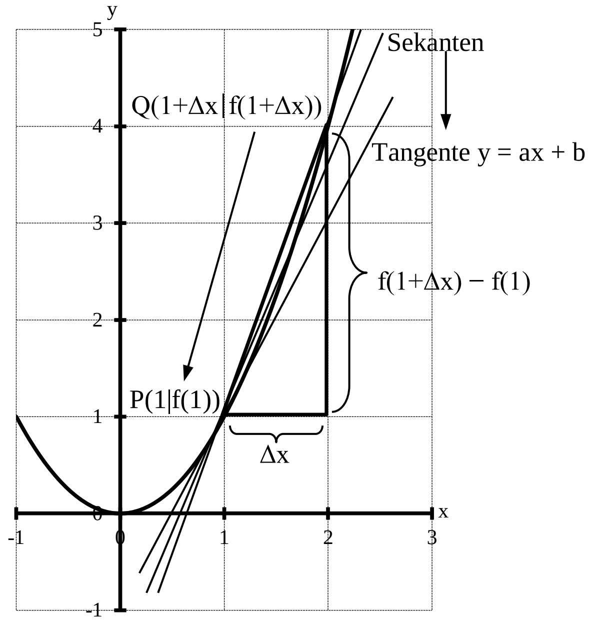
$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{oder} \quad f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Alle diese Formulierungen werden zum Teil auch nebeneinander in mathematischen und physikalischen Texten verwendet:

mittlere Steigung	= Sekantensteigung	= Differenzenquotient	= $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	= $\frac{\Delta f}{\Delta x}$	= $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
↓ $\Delta x \to 0$	↓ $\Delta x \to 0$	↓ $\Delta x \to 0$	↓ $\Delta x \to 0$	↓ $\Delta x \to 0$	↓ $\Delta x \to 0$
momentane Steigung	= Tangentensteigung	= Differentialquotient	= $\frac{dy}{dx}$	= $\frac{df}{dx}$	= f'(x)

Beispiel 1: Bestimme die Gleichung der Tangente y = ax + b an der Normalparabel $f(x) = x^2$ an der Stelle x = 1

Man erhält man die Tangentensteigung a als **Grenzwert** der Steigungen von **Sekanten** durch P(1|1) und Q(1+Δx|f(1+Δx)) für Δx → 0:



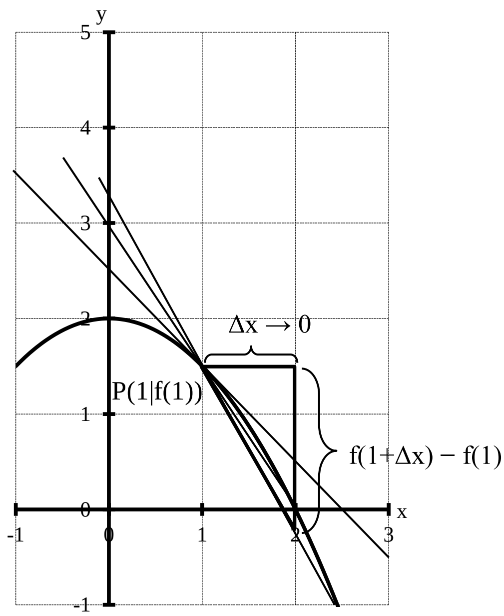
$$\text{Tangentensteigung } a = f'(1) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1^2+2\Delta x+(\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} (2+\Delta x)$$
$$= 2 + 0$$
$$= 2$$

Den y-Achsenabschnitt b bestimmt man durch Einsetzen des Berührpunktes P(1|1):

$1 = 2\cdot 1 + b \Rightarrow b = -1.$

Damit erhält man die Tangentengleichung $y = 2x - 1$.

Beispiel 2: Bestimme die Gleichung der Tangente y = ax + b an der Parabel $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ an der Stelle x = 1



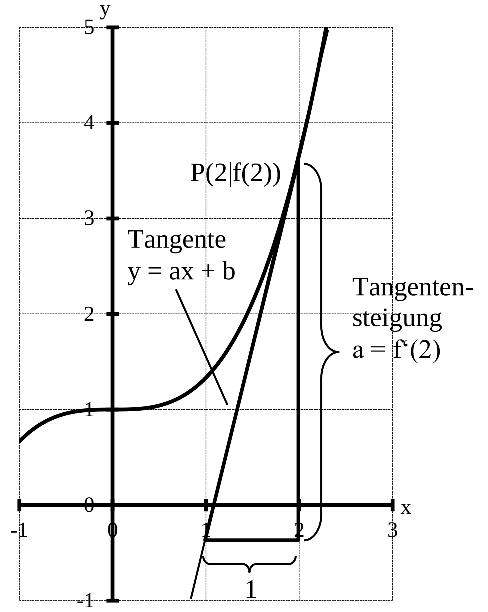
$$\text{Tangentensteigung } a = f'(1) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left[-\frac{1}{2}(1+\Delta x)^2+2\right]-\left[-\frac{1}{2}\cdot 1^2+2\right]}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}\left(1^2+2\Delta x+(\Delta x)^2\right)+2+\frac{1}{2}-2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-\Delta x-\frac{1}{2}(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(-1-\frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} (-1-\frac{1}{2}\Delta x)$$
$$= -1 - \frac{1}{2}\cdot 0$$
$$= -1$$

Den y-Achsenabschnitt b bestimmt man durch Einsetzen des Berührpunktes $P(1|\frac{3}{2})$:

$\frac{3}{2} = (-1)\cdot 1 + b \Rightarrow b = \frac{5}{2}$.

Damit erhält man die Tangentengleichung $y = -x + \frac{5}{2}$.

Beispiel 3: Bestimme die Gleichung der Tangente y = ax + b an $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ an der Stelle x = 2
Hinweis: Verwende die binomische Formel $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.



$$\text{Tangentensteigung } a = f'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[\frac{1}{3}(2+\Delta x)^3+1\right]-\left[\frac{1}{3}\cdot 2^3+1\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\left(2^3+3\cdot 2^2\cdot\Delta x+3\cdot 2\cdot\Delta x^2+\Delta x^3\right)+1-\frac{1}{3}\cdot 2^3-1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2^2\cdot\Delta x+2\cdot\Delta x^2+\frac{1}{3}\cdot\Delta x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2^2+2\cdot\Delta x+\frac{1}{3}\Delta x^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(2^2+2\cdot\Delta x+\frac{1}{3}\Delta x^2\right)$$

$$= 4 + 2\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 0^2$$

$$= 4$$

Den y-Achsenabschnitt b bestimmt man durch Einsetzen des Berührpunktes $P(2|\frac{11}{3})$: $\frac{11}{3} = 4\cdot 2 + b \Rightarrow b = -\frac{13}{3}$.

Damit erhält man die Tangentengleichung $y = 4x - \frac{13}{3}$

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 2

Beispiel 4: Steigung der Normalparabel $f(x) = x^2$ an einer beliebigen Stelle $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-\cancel{x^2}}{\Delta x}$$

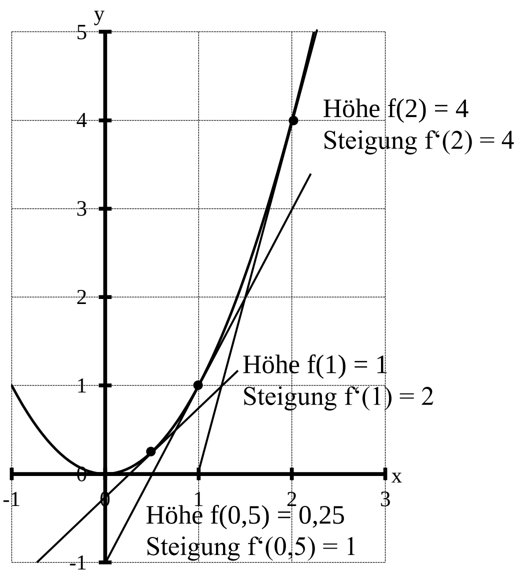
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(2x+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)$$

$$= 2x + 0$$

$$= 2x$$



Die Tangente an die Normalparabel $f(x) = x^2$ am Punkt $P(x|f(x))$ hat die Steigung $f'(x) = 2x$.

Beispiel 5: Ableitung der kubischen Parabel $f(x) = x^3$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}$
Hinweis: Verwende die binomische Formel $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \cancel{x^3}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(3x^2 + 3x \cdot \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x \cdot \Delta x) \\
&= 3x^2 + 0 \\
&= 3x^2.
\end{aligned}$$

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 3

5.2.3. Ableitung der ganzrationalen Funktionen

5.2.3.1. Ableitung der Potenzfunktionen

Satz: $(x^n)' = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{R}$

Beispiele:

f(x)	f'(x)
x^0	0
x^1	$1x^0$
x^2	$2x^1$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
x^n	nx^{n-1}

Beweis für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^n} + n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \ldots + n \cdot x \cdot (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - \cancel{x^n}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x} \cdot\ n \cdot x^{n-1} + \ldots + n \cdot x \cdot (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}}{\cancel{\Delta x}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} n \cdot x^{n-1} + \ldots + n \cdot x \cdot (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1} \\
&= n \cdot x^{n-1} + \ldots + 0 + 0 \\
&= n \cdot x^{n-1}, \text{ qed}
\end{aligned}$$

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 4

5.2.3.2. Konstante Faktoren

Beispiel: Bestimme die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{2} x^3$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung: $\left(\frac{1}{2}x^3\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2}(x+\Delta x)^3 - \frac{1}{2}x^3}{\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \frac{1}{2} 3x^2 = \frac{1}{2} (x^3)'$.

Satz: Konstante Faktoren bleiben bei der Ableitung unverändert: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$:
Beweis: $(a \cdot f(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a \cdot f(x+\Delta x) - a \cdot f(x)}{\Delta x} = a \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a \cdot f'(x) = (a \cdot f(x))'$

5.2.3.3. Ableitung von Summen

Beispiel: Bestimme die Ableitung von $f(x) = x^3 + x^2$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}$.
Lösung:

$$(x^3 + x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x)^3 - (x^3 + x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} + \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}\right) = 3x^2 + 2x = (x^3)' + (x^2)'$$

Satz: In einer Summe werden die Summanden einzeln abgeleitet: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
Beweis:

$$(f(x) + g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right) = f'(x) + g'(x).$$

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 5

Satz: Ableitung ganzrationaler Funktionen
$(a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)' = n a_n x^{n-1} + \dots + 2a_1 x + a_1$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$.
Beweis:
Anwendung der vorangegangenen Sätze über die Ableitung von Potenzfunktionen, konstanter Faktoren und Summen.

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 6 - 8

5.2.4. Ableitung der trigonometrischen Funktionen

Satz: Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen sind $\sin'(x) = \cos(x)$ **und** $\cos'(x) = -\sin(x)$
Beweis: Man benötigt die **Additionstheoreme** $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ und
$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ sowie die **Grenzwerte** $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$ und $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} = 0$:

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin(x)\cos(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{\cos(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{\sin(x)}{\Delta x}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\sin(x)\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \cos(x)\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right) \\
&= \sin(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 \\
&= \cos(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{und } \cos'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\cos(x)\cos(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{\sin(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{\cos(x)}{\Delta x}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos(x)\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} - \sin(x)\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right) \\
&= \cos(x)\cdot 0 - \sin(x)\cdot 1 \\
&= -\sin(x).
\end{aligned}$$

Übung: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 9

5.2.5. Tangenten und Normalen

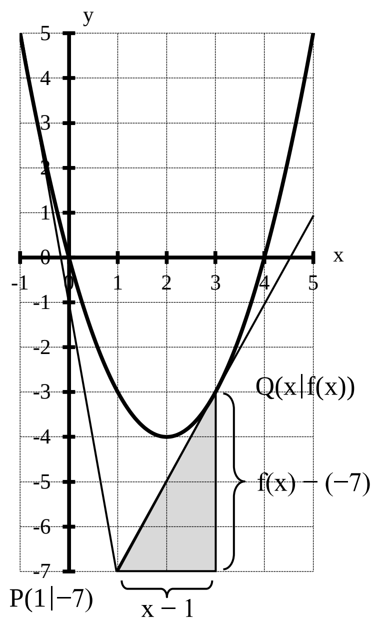
Beispiel für die Bestimmung einer Tangente durch einen vorgegebenen Punkt:

Bestimme die Gleichungen aller möglichen Tangenten, die durch $P(1|-7)$ an $f(x) = x^2 - 4x$ gelegt werden können.
Lösung:
Zunächst sucht man die **x-Werte der Berührpunkte** mit dem Ansatz

$$\begin{aligned}
\text{Tangentensteigung} &= \text{Ableitung} \\
\frac{f(x) - (-7)}{x - 1} &= f'(x) \\
\frac{x^2 - 4x - (-7)}{x - 1} &= 2x - 4 && |\cdot(x-1) \\
x^2 - 4x + 7 &= 2x^2 - 6x + 4 && |-x^2 + 4x - 7 \\
0 &= x^2 - 2x - 3 && |\text{ p-q-Formel}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ x_1 = -1$ und $x_2 = 3$

Die **y-Werte der Berührpunkte** erhält man durch Einsetzen in $f(x) = x^2 - 4x$:
$y_1 = f(x_1) = 5$ und $y_2 = f(x_2) = -3$



Die **Steigungen a der Tangenten** erhält man durch Einsetzen in $f'(x) = 2x - 4$:
$a_1 = f'(x_1) = -6$ und $a_2 = f'(x_2) = 2$
Die **y-Achsenabschnitte b der Tangenten** erhält man durch Einsetzen des vorgegebenen Punktes in die Tangentengleichung $y = ax + b$:
$b_1 = y - a_1x = -7 - (-6)\cdot 1 = -1$ und $b_2 = y - a_2x = -7 + 2\cdot 1 = -5$

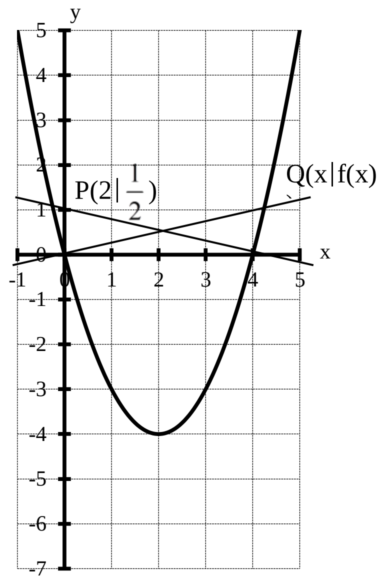
Es gibt also **zwei** Tangenten $t_1(x) = -6x - 1$ mit Berührpunkt $B_1(-1|5)$ und $t_2(x) = 2x - 5$ mit Berührpunkt $B_2(3|-3)$

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 10 - 12

Beispiel für die Bestimmung einer Normale durch einen vorgegebenen Punkt:

Bestimme die Gleichungen aller möglichen Tangenten, die durch $P(2|\frac{1}{2})$ an $f(x) = x^2 - 4x$ gelegt werden können

Lösung:
Zunächst sucht man die **x-Werte der Schnittpunkte** mit dem Ansatz



$$\text{Normalensteigung} = -\frac{1}{\text{Ableitung}}$$

$$\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 2} = -\frac{1}{f'(x)}$$

$$\frac{x^2 - 4x - \frac{1}{2}}{x - 2} = -\frac{1}{2x - 4} \quad | \cdot(x-2);\ \cdot(2x-4)$$

$$(x^2 - 4x - \frac{1}{2})(2x - 4) = -(x - 2) \quad | \text{ Klammern auflösen}$$

$$2x^3 - 12x^2 + 15x + 2 = -x + 2 \quad | + x - 2$$

$$2x^3 - 12x^2 + 16x = 0 \quad | 2x \text{ ausklammern}$$

$$2x(x - 6x + 8) = 0 \quad | \text{ p-q-Formel}$$

$\Rightarrow$ $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 4$

Die **y-Werte der Schnittpunkte** erhält man durch Einsetzen in $f(x) = x^2 - 4x$:
$y_1 = f(x_1) = 0$, $y_2 = f(x_2) = -4$ und $y_3 = f(x_3) = 0$

Die **Steigungen a der Normalen** erhält man durch Einsetzen in $a = -\frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{2x - 4}$:

$a_1 = -\frac{1}{f'(x_1)} = \frac{1}{4}$, a_2 ist nicht definiert, da die Normale senkrecht steht und $a_3 = -\frac{1}{f'(x_2)} = -\frac{1}{4}$

Die **y-Achsenabschnitte b der Normalen** erhält man durch Einsetzen des vorgegeben Punktes die Normalengleichung $y = ax + b$
$b_1 = y - a_1x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot 2 = 0$ und $b_3 = y - a_3x = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{4})\cdot 2 = 1$

Es gibt also **drei** Normalen

1. $n_1(x) = \frac{1}{4}x$ mit Schnittpunkt $S_1(0|0)$,
2. n_2: $x = 2$ mit Schnittpunkt $S_2(2|-4)$ und
3. $n_3(x) = -\frac{1}{4}x + 1$ mit Schnittpunkt $S_3(4|0)$

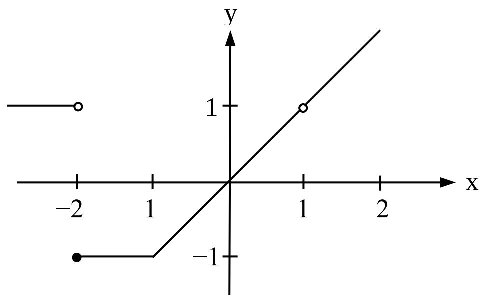
Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 14

5.2.6. Differenzierbarkeit und Stetigkeit an einer Stelle x

Beispiel: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 15 a)

Wir suchen die Ableitung f'(x) für die abschnittweise definierte Funktion f mit Sprung- und Knickstelle sowie einer Lücke:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x < -2 \\ -1 & \text{für} \quad -2 \le x < -1 \\ x & \text{für} \quad -1 \le x < 1 \\ x & \text{für} \quad 1 < x \end{cases}$$



Die Ableitungen **auf** den Geradenstücken lassen sich leicht ablesen:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -2 \\ 0 & \text{für} \quad -2 < x < -1 \\ 1 & \text{für} \quad -1 < x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 < x \end{cases}$$

Interessanter sind hier die Ableitungen an den **Übergangsstellen**, nämlich

- der **Sprungstelle** bei x = −2,
- der **Knickstelle** bei x = −1 und
- der **Definitionslücke** bei x = 1.

Sprungstelle bei x = −2:
Die Ableitung an der Stelle x = −2 ist definiert als Grenzwert des Differenzenquotienten

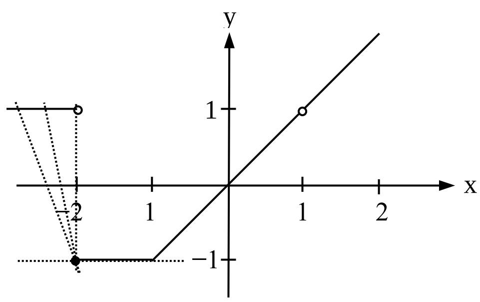
$$\frac{f(-2+\Delta x)-f(-2)}{\Delta x} = \begin{cases} \dfrac{-1-(-1)}{\Delta x} = 0 & \text{für } \Delta x > 0 \\ \dfrac{1-(-1)}{\Delta x} = \dfrac{2}{\Delta x} & \text{für } \Delta x < 0 \end{cases} \quad \text{für } \Delta x \to 0$$

Δx	$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
−0,1	−20
−0,01	−200
−0,001	−2000
−0	-
+0,001	0
+0,01	0
+0,1	0

Leider **existiert** in diesem Fall kein Grenzwert:

- Nähert man sich der −2 **von rechts** ($\Delta x > 0$), so hat der Differenzenquotient den konstanten Wert 0.
- Nähert man sich der −2 dagegen **von links** ($\Delta x < 0$), so strebt der Differenzenquotient gegen $-\infty$:

Wenn man die entsprechenden "Sekanten" in das Schaubild einzeichnet, erkennt man, dass die von links kommenden "Sekanten" schließlich fast senkrecht nach unten weisen, während die am rechten Ufer schneidenden "Sekanten" allesamt parallel zur x - Achse verlaufen:



Eine Steigung lässt sich an dieser Stelle also nicht angeben: die Funktion f ist an der Stelle x = −2 **nicht differenzierbar**.

Knickstelle bei x = −1
Die Ableitung an der Stelle $x_0 = -1$ ist definiert als Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x} = \begin{cases} \dfrac{x-(-1)}{\Delta x} = 1 & \text{für } \Delta x > 0 \\ \dfrac{-1-(-1)}{\Delta x} = 0 & \text{für } \Delta x < 0 \end{cases} \quad \text{für } \Delta x \to 0$$

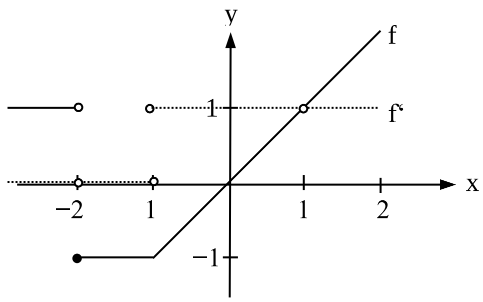
Auch in diesem Fall erhält man für $\Delta x \to 0$ keinen eindeutigen Grenzwert: Die links von x = −1 angelegten "Sekanten" sind Parallelen zur x - Achse, während die von rechts kommenden "Sekanten" allesamt die Steigung 1 haben. Auch an dieser Stelle lässt sich eine Steigung nicht eindeutig festlegen: die Funktion f ist an der Stelle x = −1 **nicht differenzierbar**.

Definitionslücke an der Stelle x = 1

Da f(x) nicht definiert ist, lässt sich der Differenzenquotient $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ und damit auch die Ableitung f'(x) nicht berechnen. Die Funktion f ist auch an der Stelle x = 1 **nicht differenzierbar**.

Ableitungsfunktion

Um den Verlauf der Steigung und die Stellen, an denen keine Steigung bestimmt werden kann, zu veranschaulichen, trägt man die Ableitungsfunktion f'(x) ebenfalls in das Koordinatensystem ein:



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x < -2 \\ -1 & \text{für} \quad -2 \le x < -1 \\ x & \text{für} \quad -1 \le x < 1 \\ x & \text{für} \quad 1 < x \end{cases} \qquad \text{mit } D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

besitzt also die Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -2 \\ 0 & \text{für} \quad -2 < x < -1 \\ 1 & \text{für} \quad -1 < x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 < x \end{cases} \qquad \text{mit } D = \mathbb{R}\backslash\{-2, -1, 1\}$$

- **Differenzierbarkeit und Stetigkeit**
- Die Funktion f heißt **differenzierbar** an der Stelle x, wenn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ = f'(x) existiert.

  Ihr Schaubild ist dann **glatt** ohne Sprünge, Knicke oder Lücken.
  Funktionen sind grundsätzlich **nicht differenzierbar** an **Sprungstellen, Knickstellen** und **Definitionslücken**.

- Die Funktion f heißt **stetig** an der Stelle x, falls $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)$ = f(x).

  Ihr Schaubild kann also **ohne abzusetzen** durchgezogen werden und hat keine Lücken
  Funktionen sind grundsätzlich **nicht stetig** an **Sprungstellen** und **Definitionslücken**.

- **Ist f an der Stelle x differenzierbar, so gilt $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)-f(x)$ = 0 und sie ist dort auch stetig.**

  Die Umkehrung gilt nicht!

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 15 b) – f)