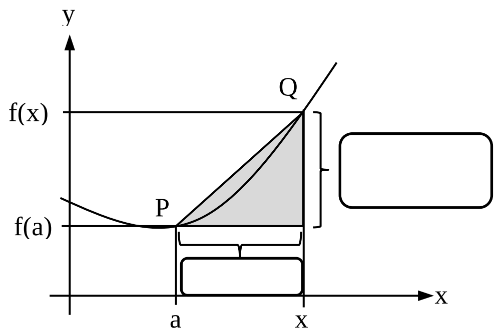
5.2. Überblick zur Differentialrechnung

Mittlere Steigung einer Funktion zwischen zwei Punkten

Die **mittlere Steigung**der Funktion f(x) zwischen zwei Punkten P(a|f(a)) und Q(x|f(x)) ist definiert als



der **Differenzenquotient**

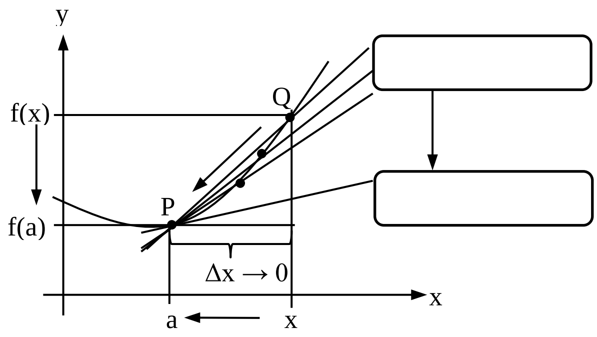
$$\frac{\text{Änderung in y}}{\text{Änderung in x}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\qquad\qquad}$$

Sie kann auch als **mittlere Änderungsrate** gedeutet werden, wenn x für die Zeit steht, insbesondere bei der

mittleren Geschwindigkeit v = $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\text{Änderung des Ortes}}{\text{Änderung der Zeit}}$

Momentane Steigung einer Funktion in einem Punkt

Die **momentane Steigung** oder **Ableitung** f'(a) einer Funktion f(x) im Punkt P(a|f(a)) ist definiert als die Steigung der Tangente an y = f(a) in P.



Graphisch kann diese Tangente durch Sekanten durch die Punkte P(a|f(a)) und Q(x)|f(x)) angenähert werden, wenn Q immer näher an P heranrückt.

Rechnerisch ist die Steigung der Tangente der Grenzwert der Sekantensteigungen für x → a:

mittlere Steigung = Sekantensteigung = Differenzenquotient = $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

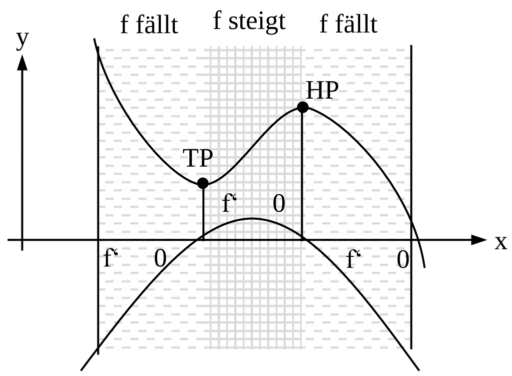
$\downarrow x \to a$ $\qquad$ $\downarrow x \to a$ $\qquad$ $\downarrow x \to a$ $\qquad$ $\downarrow x \to a$

__________ **Steigung** = Tangentensteigung = Differentialquotient = $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ = f'(a) = ____________

Monotonie und Krümmung einer Kurve

1. Ableitung und Steigungsverhalten

$$\begin{Bmatrix} \text{f steigt} \\ \text{f fällt} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} f' \quad 0 \\ f' \quad 0 \end{Bmatrix}$$

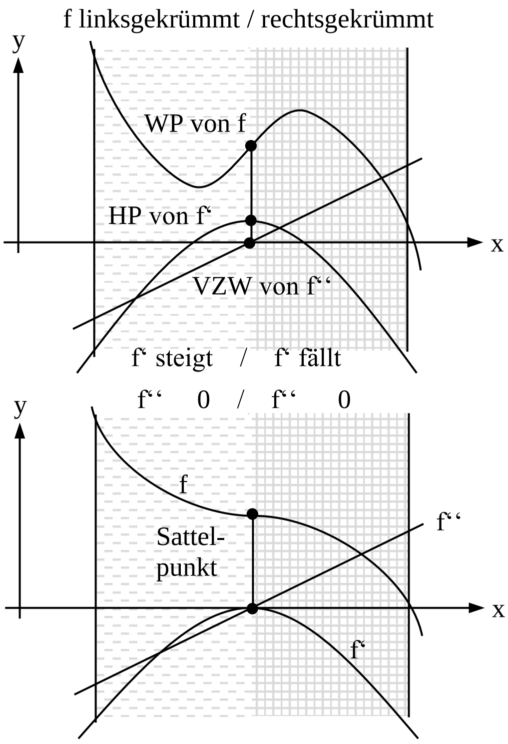


1. Ableitung und lokale Extrema

$$\begin{Bmatrix} \text{f hat Hochpunkt H(a|f(a))} \\ \text{f hat Tiefpunkt T(a|f(a))} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} f' \text{ hat VZW von} \quad \text{zu} \\ f' \text{ hat VZW von} \quad \text{zu} \end{Bmatrix}$$

2. Ableitung und Krümmung

$$\begin{Bmatrix} f \text{ ist linksgekrümmt} \\ f \text{ ist rechtsgekrümmt} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} f' \qquad \\ f \qquad \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} f'' \quad 0 \\ f'' \quad 0 \end{Bmatrix}$$



2. Ableitung und Wendepunkte

f hat einen **Wendepunkt** W(a|f(a))**,** wenn

die **1. Ableitung f‘** ein _______________ bzw.

die **2. Ableitung f‘‘** einen ______ besitzt.

Sattelpunkte

Wendepunkte mit waagrechter Tangente nennt man **Sattelpunkte.**

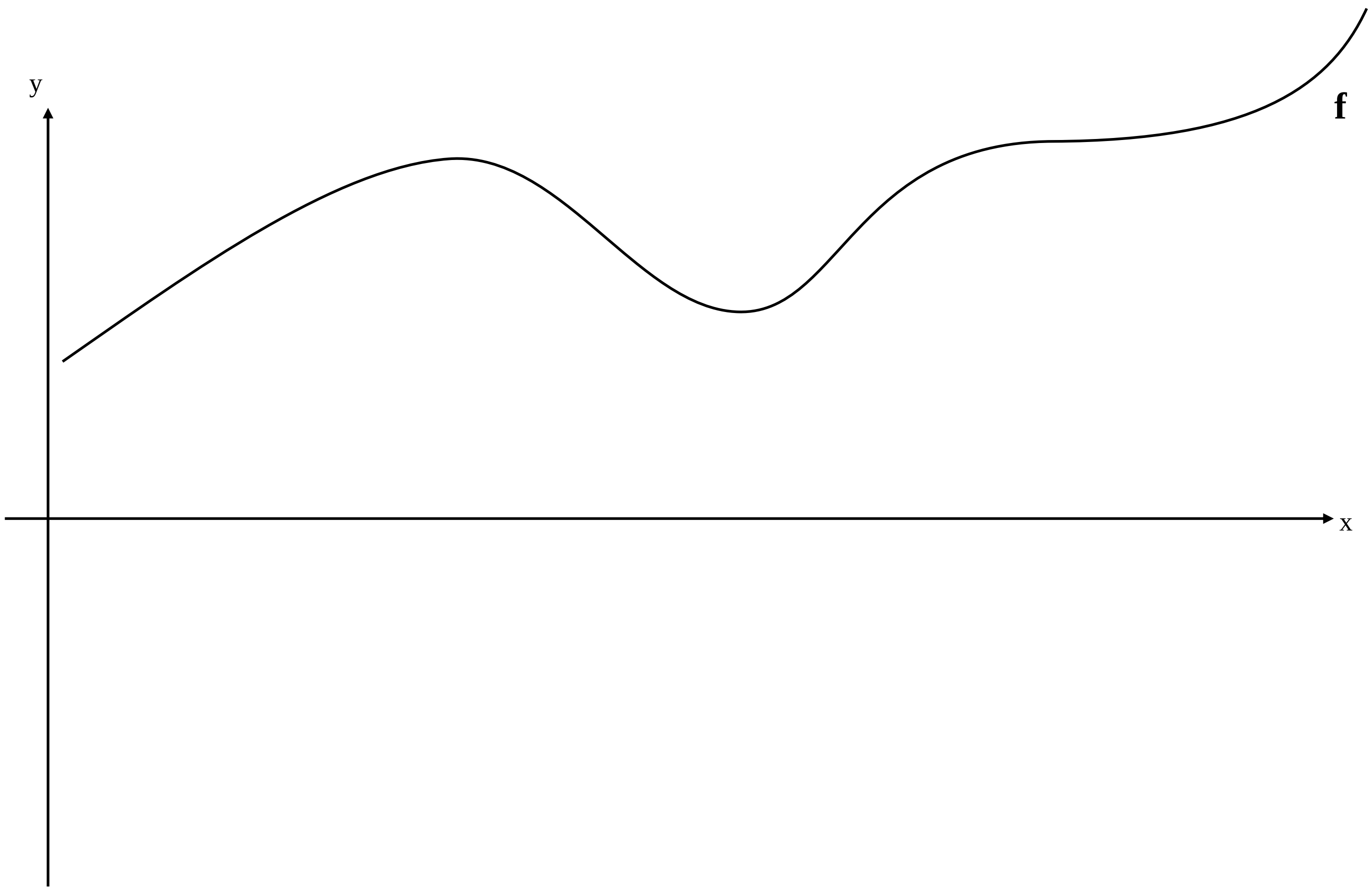
Sie treten auf, wenn das **Extremum der 1. Ableitung** die x-Achse

__________.

Zusammenfassung (N = NST mit VZW!)

f					
f‘					
f‘‘					

Beispiel:



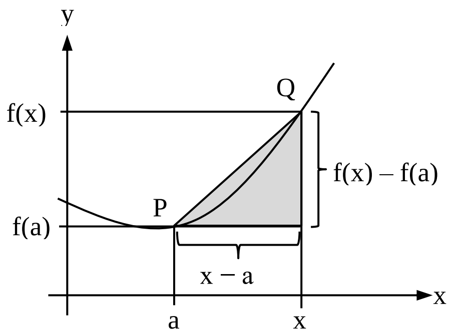
5.2. Überblick zur Differentialrechnung

Mittlere Steigung einer Funktion zwischen zwei Punkten

Die **mittlere Steigung** der Funktion f(x) zwischen zwei Punkten P(a|f(a)) und Q(x|f(x)) ist definiert als

der **Differenzenquotient**

$$\frac{\text{Änderung in y}}{\text{Änderung in x}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Sie kann auch als **mittlere Änderungsrate** gedeutet werden, wenn x für die Zeit steht, insbesondere bei der

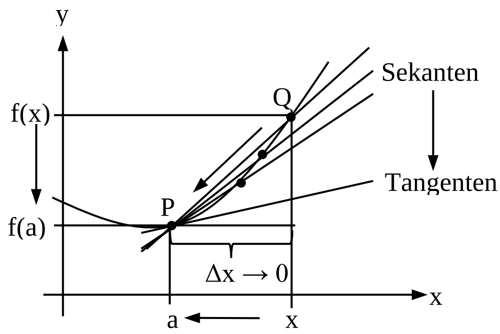
mittleren Geschwindigkeit v $= \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{\text{Änderung des Ortes}}{\text{Änderung der Zeit}}$

Momentane Steigung einer Funktion in einem Punkt

Die **momentane Steigung** oder **Ableitung** f'(a) einer Funktion f(x) im Punkt P(a|f(a)) ist definiert als die Steigung der Tangente an y = f(a) in P.

Graphisch kann diese Tangente durch Sekanten durch die Punkte P(a|f(a)) und Q(x)|f(x)) angenähert werden, wenn Q immer näher an P heranrückt.

Rechnerisch ist die Steigung der Tangente der Grenzwert der Sekantensteigungen für x → a:



mittlere Steigung = Sekantensteigung = Differenzenquotien = $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

↓ x → a ↓ x → a ↓ x → a ↓ x → a

momentane Steigung = Tangentensteigung = Differentialquotient = $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ = f'(a) = **Ableitung**

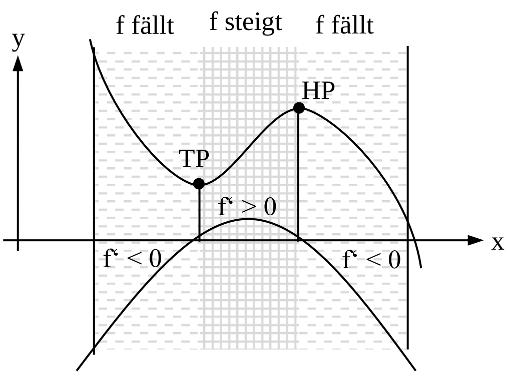
Monotonie und Krümmung einer Kurve

1. Ableitung und Steigungsverhalten

$$\begin{Bmatrix} \text{f steigt} \\ \text{f fällt} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} f' > 0 \\ f' < 0 \end{Bmatrix}$$

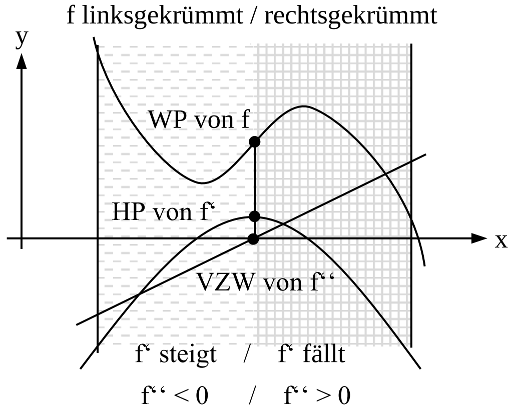
1. Ableitung und lokale Extrema

$$\begin{Bmatrix} \text{f hat Hochpunkt H(a|f(a))} \\ \text{f hat Tiefpunkt T(a|f(a))} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} f' \text{ hat VZW von + zu −} \\ f' \text{ hat VZW von − zu +} \end{Bmatrix}$$



2. Ableitung und Krümmung

$$\begin{Bmatrix} f \text{ ist linksgekrümmt} \\ f \text{ ist rechtsgekrümmt} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} f' \text{ steigt} \\ f' \text{ fällt} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} f'' > 0 \\ f'' < 0 \end{Bmatrix}$$



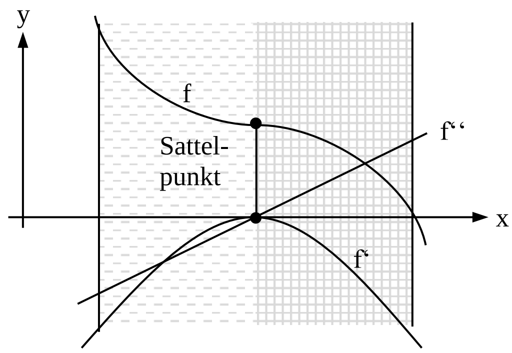
2. Ableitung und Wendepunkte

f hat einen **Wendepunkt** W(a|f(a))**,** wenn

die **1. Ableitung f‘** ein **Extremum** bzw.

die **2. Ableitung f‘‘** einen **VZW** besitzt.

Sattelpunkte



Wendepunkte mit waagrechter Tangente nennt man **Sattelpunkte.**

Sie treten auf, wenn das **Extremum der 1. Ableitung** die x-Achse **berührt.**

Zusammenfassung (N = NST mit VZW!)

f	**N**	**E**	**W**		
f‘		**N**	**E**	**W**	
f‘‘			**N**	**E**	**W**

Beispiel: