5.3. Aufgaben zur Kurvenuntersuchung ganzrationaler Funktionen

Aufgabe 1: Kurvendiskussion
Untersuche die folgenden Funktionen auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte und zeichne ein Schaubild im wesentlichen Bereich mit 1 LE = 2 cm

Anleitung zur Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten
1. Markiere **steigende** Abschnitte mit **durchgezogener roter** Linie und **fallende** Abschnitte mit **durchbrochener roter** Linie.
2. Bestimme dann die **1. Ableitung f'(x)** und ihre **Nullstellen**. Zeichne ihr Schaubild ebenfalls in roter Farbe in das Koordinatensystem ein.
3. Wie lässt sich ein **Hoch- oder Tiefpunkt** von f mit Hilfe des **Vorzeichens** von f' charakterisieren?

Anleitung zur Bestimmung von Wendepunkten
1. Markiere **linksgekrümmte** Abschnitte mit **durchgezogener grüner** Linie und **rechtsgekrümmte** Abschnitte mit **durchbrochener grüner** Linie.
2. Bestimme dann die **2. Ableitung f''(x)** und ihre **Nullstellen**. Zeichne ihr Schaubild ebenfalls in grüner Farbe in das Koordinatensystem ein.
3. Wie lässt sich ein **Wendepunkt** von f mit Hilfe des **Vorzeichens** von f'' charakterisieren?

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$

c) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$

d) $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 + 2x^3$

e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$

f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ (WP ohne y-Wert!)

g) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$

h) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x^2$

i) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^2 + 6$

j) $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$

k) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{9}{4}$

l) $f(x) = -\frac{1}{20}x^5 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{9}{4}x$ (ohne Nullstellen!)

m) $f(x) = \frac{1}{4}x^5 - \frac{25}{12}x^3 + 5x$

n) $f(x) = \frac{1}{10}(x + 1)(x - 2)^3$ (Polynomdivision notwendig!)

Aufgabe 2: gemeinsame Punkte von Kurvenscharen
Zeichne die **Schaubilder** für die angegebenen t in ein gemeinsames Koordinatensystem. Gib die Koordinaten des **gemeinsamen Punktes $P(x_0|y_0)$** an und belege deine Vermutung rechnerisch nach dem folgenden Kriterium: Der Punkt $P(x_0|y_0)$ ist ein gemeinsamer Punkt der Kurvenschar, wenn zwei beliebige Kurven f_{t1} und f_{t2} an der Stelle x_0 den gleichen Funktionswert y_0 haben, d.h., wenn für beliebige t_1 und t_2 gilt: $f_{t1}(x_0) = f_{t2}(x_0) = y_0$.

a) $f_t(x) = x^2 + 2tx + 1 - 2t$ für t = 0, ± 1 und ± 2

b) $f_t(x) = \frac{1}{x - t} + \frac{t}{t - 1}$ für t = −1, 0, 2 und 3

c) $f_t(x) = x^3 + 3x^2 + (3 - t^2)x + 1 + t^2$ für t = 0, ± 1 und ± 2

Aufgabe 3: Hüllkurven von Geradenscharen
Zeichne die **Schaubilder** für die angegebenen t in ein gemeinsames Koordinatensystem. Gib die Gleichung der **Hüllkurven f(x)** an und belege deine Vermutung rechnerisch nach dem folgenden Kriterium: Die Kurve f(x) ist eine Hüllkurve der Geradenschar, wenn die Geraden g_t die Kurve f an der Stelle x = t berühren, d.h., wenn für beliebige t gilt $f(t) = g_t(t)$ und $f'(t) = g_t'(t)$.

a) $g_t(x) = 2tx - t^2$ für $t = 0, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$ und ± 3

b) $g_t(x) = -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}$ für $t = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3$ und 4

c) $g_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{\sqrt{t}}{2}$ für $t = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3$ und 4

Aufgabe 4: Ortskurven von Extrem- und Wendepunkten

Bestimme für jeden Extrempunkt und für jeden Wendepunkt der Funktion f die Koordinaten in Abhängigkeit von Parameter und die Gleichung seiner Ortskurve. Die **Ortskurve** oder **Spur** eines Extrem- oder Wendepunktes ist die Kurve, die man erhält, wenn man die entsprechenden Punkte für alle möglichen Parameterwerte in das Koordinatensystem einzeichnet

a) $f_t(x) = x(x - t)$ mit $t \in \mathbb{R}$

b) $f_a(x) = x^2 + 6x + a$ mit $a \in \mathbb{R}$

c) $f_a(x) = x^2 + ax + 2$ mit $a \in \mathbb{R}$

d) $f_a(x) = ax^2 - 8x - 5$ mit $a \in \mathbb{R}$

e) $f_t(x) = -\frac{t^3}{16}x^2 + \frac{t^2}{2}x$ mit $t \in \mathbb{R}_+^*$

f) $f_k(x) = x^3 + \frac{6-3k}{2}x^2 - 6kx + 2$ mit $k \in \mathbb{R}_+^*$

g) $f_a(x) = \frac{1}{a^2}x^3 - \frac{3}{a}x$ mit $a \in \mathbb{R}_+^*$

h) $f_t(x) = \frac{1}{6t}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}tx$ mit $t \in \mathbb{R}_+^*$

i) $f_t(x) = ax^3 - x^2$ mit $a \in \mathbb{R}^*$

j) $f_b(x) = x^4 + bx^3$ mit $b \in \mathbb{R}_+^*$

k) $f_t(x) = -t^2x^3 + 2x + 1$ mit $t > 0$

l) $f_t(x) = \frac{1}{x} - \frac{t}{x^2}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5: Bestimmung von Funktionsgleichungen

Bestimme die Gleichung der folgenden Funktionen:

a) Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Es berührt dort die Gerade mit der Gleichung $y = 2x$ und schneidet die x-Achse bei $x_1 = 2$.

b) Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat den Extrempunkt $E(-2|-2)$ und den Wendepunkt $W(0|-4)$.

c) Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat an der Stelle $x_0 = 0$ die Steigung 0. Die Wendetangente im Wendepunkt $W(3|3)$ ist die 1. Winkelhalbierende.

d) Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades schneidet die x-Achse im Punkt $N(4|0)$, hat den Hochpunkt $H(2|7)$ und den Tiefpunkt $T(1|\frac{27}{4})$.

e) Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat den Wendepunkt $W(1|\frac{5}{4})$. Es schneidet das Schaubild der Parabel $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$ an der Stelle $x_0 = -1$ und hat im Schnittpunkt die Steigung 1.

f) Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse. Ein Wendepunkt ist $W(1|2)$ und die zugehörige Wendetangente geht durch den Ursprung $O(0|0)$.

g) Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat im Wendepunkt $W(2|0)$ eine horizontale Wendetangente. Die Normale im Ursprung des Koordinatensystems hat die Steigung $m = -\frac{1}{8}$.

h) Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 5. Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Im Wendepunkt $W(2|f(2))$ hat es eine horizontale Wendetangente, die die y-Achse bei $y = \frac{64}{25}$ schneidet.

i) Die Schaubilder einer Schar kubischer Parabeln f_t gehen alle durch den Ursprung und haben dort eine Tangente mit der Steigung $m_t = \frac{3}{2}t$. Die Parabeln dieser Schar berühren außerdem die x-Achse in $N(3t|0)$.

j) Die Schaubilder einer Schar von Parabeln 3. Ordnung sind punktsymmetrisch zum Ursprung und gehen alle durch den gemeinsamen Punkt $P(2|4)$.|

Aufgabe 6: Extremwertaufgaben

a) Die Senkrechte $x = u$ sei für $0 \leq u \leq 1$ frei verschiebbar und schneidet die x-Achse im Punkt P und das Schaubild der Parabel $f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 2x - 15)$ im Punkt Q. Die Parabel schneidet die positive x-Achse im Punkt R. Für welches u wird der Flächeninhalt des Dreieckes PQR maximal?

b) Die Senkrechte $x = u$ schneidet $f(x) = (x - 2)^2 - 2$ im Punkt B und $g(x) = (x - 4)^2 + 2$ im Punkt C. Außerdem ist der Punkt $A(1|2)$ gegeben. Für welches u mit $1 \leq u \leq 4$ wird die Fläche des Dreiecks ABC maximal?

Aufgabe 7: Extremwertaufgabe mit Abstand und Fläche zwischen zwei Schaubildern

Die Senkrechte mit der Gleichung x = u ist in dem Raum, der von den Schaubildern der Funktionen f und g eingeschlossen wird, frei beweglich. Sie schneidet das Schaubild von f im Punkt P und das Schaubild von g im Punkt Q. O(0|0) ist der Koordinatenursprung.

1. Für welches u wird der Abstand $\overline{PQ}$ maximal?
2. Für welches u wird die Fläche des Dreiecks OPQ maximal?

a) $f(x) = x^2 - 6x$ und $g(x) = -x^2$

b) $f(x) = x^2$ und $g(x) = x(x-2)^2$

Aufgabe 8: Extremwertaufgabe mit selbstgewählten Koordinaten

a) In den Raum, der durch die beiden Koordinatenachsen und die Parabel $f(x) = -x^2 + 4$ begrenzt wird, soll ein Rechteck maximaler Fläche gelegt werden.

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 - 5x^2 - 20$. In die Fläche zwischen x-Achse und Schaubild soll ein Rechteck maximaler Fläche einbeschrieben werden, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

c) Gegeben ist die Parabel $f(x) = x^2 - 3$ und der Punkt A(−1|1). Gesucht ist das Dreieck ABC maximaler Fläche, dessen Grundseite BC parallel zur x-Achse verläuft und außerdem zwischen der Parabel und der x-Achse liegt.

d) Gegeben seien die Funktionen $f(x) = 3 - \frac{2}{3}x^2$ und $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 6$. In die Fläche zwischen den Schaubildern soll ein Rechteck mit maximaler Fläche gelegt werden, dessen Seiten parallel zu den Achsen verlaufen.

Aufgabe 9: Extremwertaufgabe mit Verschiebungen

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Zeige zunächst, dass f symmetrisch ist zur Achse x = 2. In die Fläche zwischen x-Achse und Schaubild soll ein Dreieck maximaler Fläche einbeschrieben werden. Dabei soll die Spitze C auf der x-Achse liegen und die Grundseite AB parallel zur x-Achse verlaufen.

b) In den Raum, der durch die beiden Koordinatenachsen und die Parabel $f(x) = -x^2 + 4x$ begrenzt wird, soll ein Rechteck maximaler Fläche gelegt werden.

Aufgabe 10: Extremwertaufgabe mit Kurvenschar

Gegeben seien die Funktionen $f_t(x) = x^2(x - t)$. Bestimme das u_t, für das in Abhängigkeit von t das rechtwinklige Dreieck mit den Ecken A(u|0), B(t|0) und C(u|f_t(u)) einen maximalen Flächeninhalt bekommt.

Aufgabe 11: Anwendungsaufgaben

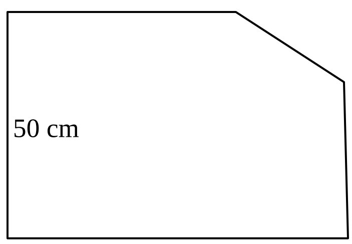
a) Die Herstellungskosten für eine Kaffeemaschine belaufen sich auf 22 €. Die Marketingabteilung ermittelt bei einem Verkaufspreis von 45 € eine Absatzpotenzial von 60 000 Geräten. Außerdem prognostiziert die Marketingabteilung für jede Verminderung des Verkaufspreises um 1 € eine Absatzsteigerung von 8 000 Geräten. Bei welchem Verkaufspreis ist der Gewinn maximal?

b) Ein Bauer möchte mit einem 400 m langen Zaun eine möglichst große rechteckige Fläche abzäunen. Welche Maße muss die Fläche haben?

c) Ein Bauer möchte eine 400 m^2 große rechteckige Fläche mit möglichst wenige Zaun eingrenzen. Welche Abmessungen muss die Fläche haben?

d) In ein beliebiges Dreieck mit der Basislänge 8 cm und der Höhe 6 cm soll ein Rechteck mit möglichst großer Fläche gelegt werden. Hinweis: Verwende den Strahlensatz oder das Prinzip von Cavalieri.

e) Bei einer rechteckigen Glasscheibe ist beim Transport an einer Ecke ein Stück mit einer fast geraden Bruchkante abgesprungen. Wie kann man aus dem Reststück eine möglichst große neue rechteckige Platte zurechtschneiden?



f) Die Tragfähigkeit eines Balkens von rechteckigem Querschnitt ist gegeben durch $T = kxy^2$, wobei x die Breite, y die Höhe und k eine Materialkonstante bedeuten. Aus einem zylindrischen Baumstamm mit dem Radius r = 12 cm soll ein Balken mit maximaler Tragfähigkeit gesägt werden.

g) Einer Kugel von Radius R = 5 cm soll ein Zylinder maximalen Volumens einbeschrieben werden. Ein Zylinder der Höhe h mit Radius r hat das Volumen $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

h) Eine Fabrik stellt zylinderförmige Konservendosen für einen Inhalt von 1 Liter her. Wie müssen Radius r und Höhe h gewählt werden, damit der Blechbedarf minimal wird?

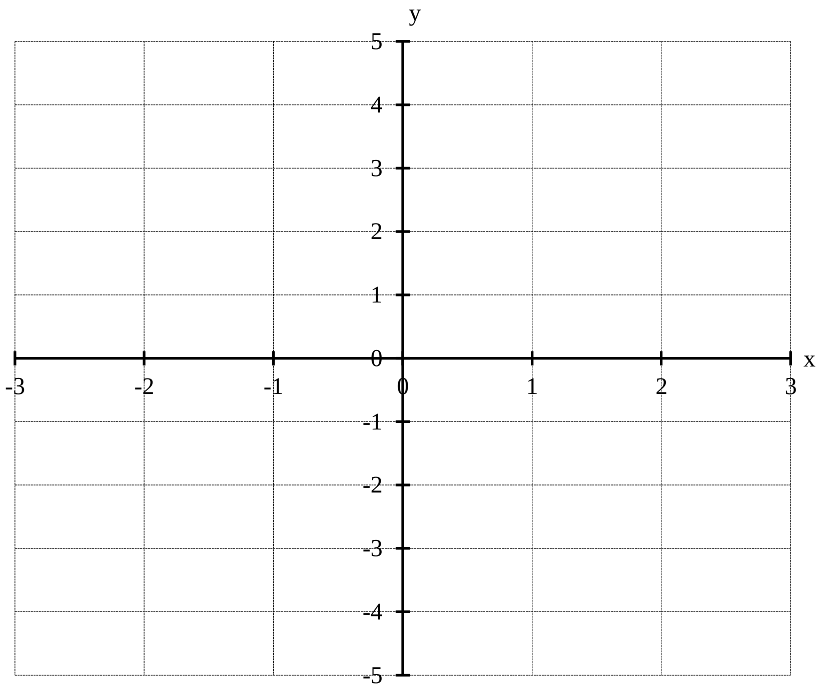
Aufgabe 12: Newton-Verfahren

Gib die ersten 5 Näherungswerte des Newton-Verfahrens zum gegebenen Startwert x_0 an

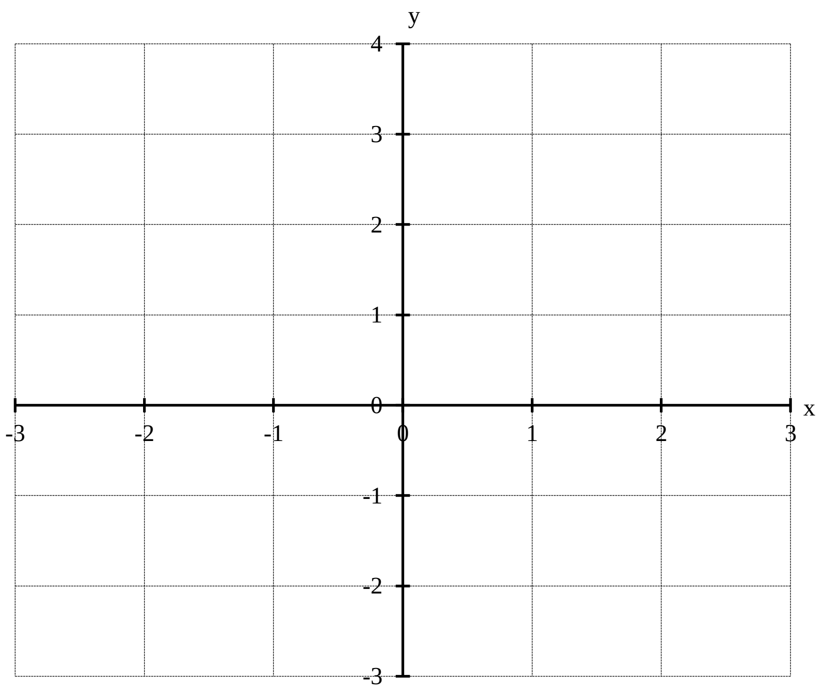
a) $f(x) = x^3 - x^2 + 3$ für $x_0 = 1$ b) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ für $x_0 = 2$ c) $f(x) = x^3 - x - 1$ für $x_0 = 1$

Schaubilder zu Aufgabe 1

Aufgabe 1 a)

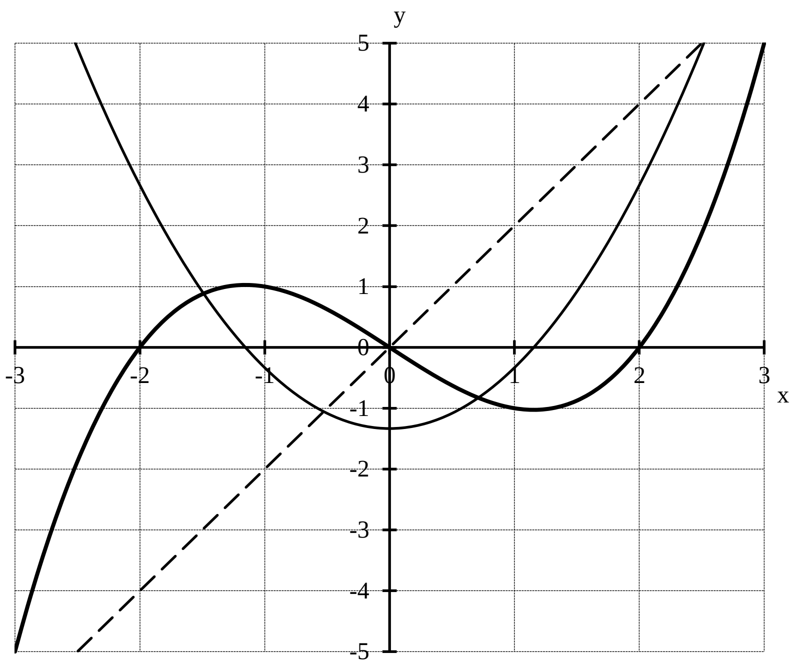


Aufgabe 1 b)

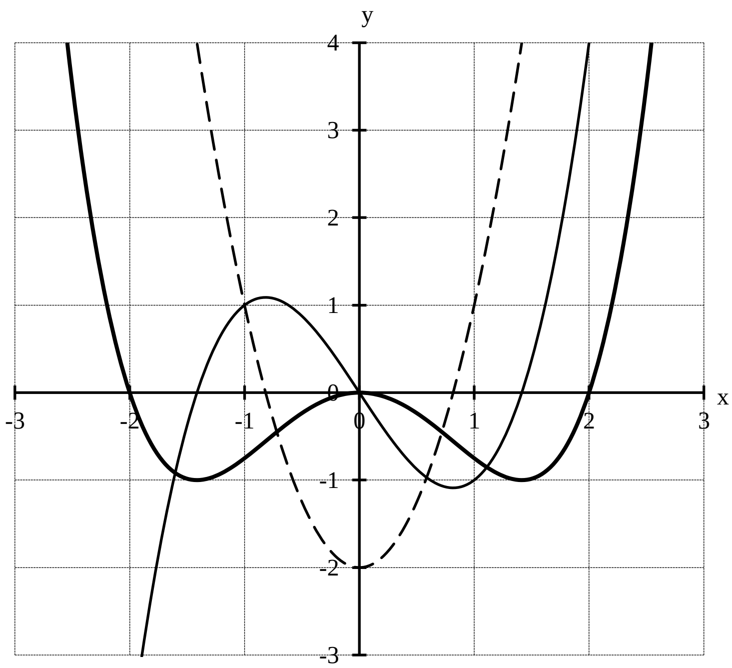


Schaubilder zu Aufgabe 1

Aufgabe 1 a)



Aufgabe 1 b)



5.3. Lösungen zu den Aufgaben zur Kurvenuntersuchung ganzrationaler Funktionen

Aufgabe 1: Kurvendiskussion

a) siehe Skript

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 = \frac{1}{4}\cdot x^2\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

Symmetrie: gerade Funktion mit $f(-x) = f(x)$ symmetrisch zur y-Achse
Achsenschnittpunkte $N_1(-2|0)$, $N_2(0|0)$ (doppelt), $N_3(2|0)$

Ableitungen: $f'(x) = x^3 - 2x = x(x^2 - 2)$ mit NST bei $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$ und $x_3 = 0$,

$f''(x) = 3x^2 - 2$ mit NST bei $x_{4/5} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$f'''(x) = 6x$

Extrempunkte: $f(\pm\sqrt{2}) = -1$, $f'(\pm\sqrt{2}) = 0$ mit VZW von + nach – bzw. $f''(\pm\sqrt{2}) = 4 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkte $T_{1/2}(\pm\sqrt{2}|-1)$,
$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ mit VZW von – nach + bzw. $f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt H(0|0)

Wendpunkte: $f(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}) = -\frac{5}{9}$, $f''(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}) = 0$ einfach mit VZW bzw. $f'''(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkte $W_{1/2}(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}|-\frac{5}{9})$

c) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x = \frac{1}{3}x(x-3)(x+3)$

Symmetrie: $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung
Achsenschnittpunkte: S(0|0)
Ableitungen: $f'(x) = -x^2 + 3$, $f''(x) = -2x$ und $f'''(x) = -2$
Extrema ($f'(x) = 0$ einfach mit VZW von $\mp$ nach $\pm$ oder Symmetrie oder $f''(x)$ </> 0): $H(-\sqrt{3}|2\sqrt{3})$ und $T(\sqrt{3}|-2\sqrt{3})$
Wendepunkte ($f''(x) = 0$ einfach mit VZW oder $f'''(x) \neq 0$): W(0|0)

d) $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 + 2x^3 = -\frac{3}{4}x^3(x - \frac{8}{3})$

Symmetrie: weder gerade noch ungerade

Achsenschnittpunkte: $S_{x1}(0|0)$ (dreifach $\Rightarrow$ Sattelpunkt), $S_{x2}(\frac{8}{3}|0)$

Ableitungen: $f'(x) = -3x^3 + 6x^2$, $f''(x) = -9x^2 + 12x$ und $f'''(x) = -18x$
Extrema ($f'(x) = 0$ einfach mit VZW von – nach + oder $f''(x) < 0$): H(2|4)

Wendepunkte ($f''(x) = 0$ einfach mit VZW bzw. $f'''(x) \neq 0$): Sattelpunkt S(0|0) und $W(\frac{4}{3}|\frac{16}{27})$

e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x = -\frac{1}{3}x(x^2 - 6x + 9)$

Symmetrie: weder gerade noch ungerade
Achsenschnittpunkte: $S_{x1}(0|0)$, $S_{x2/3}(3|0)$ (doppelt $\Rightarrow$ Berührpunkt bzw. Extremum!)
Ableitungen: $f'(x) = -x^2 + 4x - 3 = -(x-1)(x-3)$, $f''(x) = -2x + 4$ und $f'''(x) = -2$

Extrempunkte: ($f'(x) = 0$ einfach mit VZW von $\pm$ nach $\mp$ oder Symmetrie oder $f''(x)$ </> 0): $T(1|-\frac{4}{3})$ und H(3|0)

Wendepunkt ($f''(x) = 0$ einfach mit VZW bzw. $f'''(x) \neq 0$): $W(2|-\frac{2}{3})$

f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 = -\frac{1}{4}x^2(x^2 - \frac{16}{3}x + 6) =$

Symmetrie: weder gerade noch ungerade

Achsenschnittpunkte: $S_{x1}(0|0)$ (doppelt $\Rightarrow$ Berührpunkt bzw. Extremum!), $S_{x2/3}(\frac{16}{3} \pm \frac{\sqrt{10}}{3}|0)$

Ableitungen: $f'(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x = -(x-1)(x-3)$, $f''(x) = -3x^2 + 8x - 3 = -3(x^2 - \frac{8}{3}x + 1)$ und $f'''(x) = -6x + 8$

Hochpunkte ($f'(x) = 0$ einfach mit VZW von + nach – oder $f''(x) < 0$): $H_1(0|0)$ und $H_2(3|\frac{9}{4})$

Tiefpunkt ($f'(x) = 0$ einfach mit VZW von – nach + oder $f''(x) < 0$): $T(1|-\frac{5}{12})$

Wendepunkte ($f''(x) = 0$ einfach mit VZW bzw. $f'''(x) \neq 0$): $W_{1/2}(\frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3} | f\left(\frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3}\right))$

g) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x = \frac{1}{6}x(x^2 - 9x + 24)$

Symmetrie: keine

Achsenschnittpunkte: $S(0|0)$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = \frac{1}{2}(x-2)(x-4)$, $f''(x) = x - 3$ und $f'''(x) = 1$

Extrema ($f'(x) = 0$ einfach mit VZW von $\pm$ nach $\mp$ oder $f''(x)$ </> 0): $H(2|\frac{10}{3})$ und $T(4|\frac{8}{3})$

Wendepunkt ($f''(x) = 0$ einfach mit VZW oder $f'''(x) \neq 0$): $W(3|3)$

h) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x^2 = -\frac{1}{4}x^2(x-4)$

Symmetrie: keine

Achsenschnittpunkte: $S_{x1}(0|0)$ (doppelt $\Rightarrow$ Berührpunkt/Extremum) und $S_{x2}(4|0)$

Ableitungen: $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x = -\frac{3}{4}x(x - \frac{8}{3})$, $f''(x) = -\frac{3}{2}x + 2$ und $f'''(x) = -\frac{3}{2}$

Extrema ($f'(x) = 0$ einfach mit VZW von $\mp$ nach $\pm$ oder $f''(x)$ </> 0): $H(\frac{8}{3}|\frac{64}{27}) \approx H(2{,}\bar{6}|2{,}37)$ und $T(0|0)$

Wendepunkt ($f''(x) = 0$ einfach mit VZW oder $f'''(x) \neq 0$): $W(\frac{4}{3}|\frac{32}{27}) \approx W(1{,}\bar{3}|1{,}16)$

i) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^2 + 6 = \frac{1}{12}(x^4 - 12x^2 + 72)$

Symmetrie: $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse

Achsenschnittpunkte: $S(0|6)$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x = \frac{1}{3}x(x^2 - 6)$, $f''(x) = x^2 - 2$ und $f'''(x) = 2x$

Extrema: $f'(x) = 0$ einfach mit VZW von $\mp$ nach $\pm$ oder Symmetrie oder $f''(x)$ </> 0 $\Rightarrow$ $H(0|6)$ und $T_{1/2}(\pm\sqrt{6}|3)$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$ einfach mit VZW oder $f'''(x) \neq 0 \Rightarrow W_{1/2}(\pm\sqrt{2}|\frac{13}{3})$

j) $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 4 = -(x^2 - 1)(x^2 - 4)$

Symmetrie: $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse.

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|-4)$, $S_{1/2}(\pm 1|0)$, $S_{3/4}(\pm 2|0)$

Ableitungen: $f'(x) = 4x^3 - 10x = 4x(x^2 - \frac{5}{2})$, $f''(x) = 12x^2 - 10 = 12(x^2 - \frac{5}{6})$, $f'''(x) = 24x$

Extrema: $f'(x) = 0$ einfach mit VZW von $\mp$ nach $\pm$ oder Symmetrie $\Rightarrow$ $T(0|-4)$ und $H_{1/2}(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}|\frac{9}{4}) \approx H_{1/2}(\pm 1{,}58|2{,}25)$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ einfach mit VZW oder $f'''(x) \neq 0 \Rightarrow W_{1/2}(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}|-\frac{19}{36}) \approx W_{1/2}(\pm 0{,}91|-0{,}53)$

k) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}(x^2 - 9)(x^2 + 1)$

Symmetrie: $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|\frac{9}{4})$ und $S_{x1/2}(\pm 3|0)$

Ableitungen: $f'(x) = -x^3 + 4x = -x(x - 2)(x + 2)$, $f''(x) = -3x^2 + 4 = -3(x^2 - \frac{4}{3})$ und $f'''(x) = -6x$

Extrema ($f'(x) = 0$ einfach mit VZW von $\mp$ nach $\pm$ oder Symmetrie): $H_{1/2}(\pm 2|\frac{25}{4}) = H_{1/2}(\pm 2|6{,}25)$ und $T(0|\frac{9}{4}) = T(0|2{,}25)$

Wendepunkte ($f''(x) = 0$ einfach mit VZW oder $f'''(x) \neq 0$): $W_{1/2}(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}|\frac{161}{36}) \approx W_{1/2}(\pm 1{,}155|4{,}472)$

l) $f(x) = -\frac{1}{20}x^5 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{9}{4}x = -\frac{1}{20}x(x^4 - \frac{50}{3}x^2 + 45)$

Symmetrie: $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung

Achsenschnittpunkte: $S(0|0)$ und $S_{x1/2/3/4}(\pm\sqrt{\frac{1}{3}\ 25 \pm 10\sqrt{2{,}2}}\ |0) \approx S_{x1/2}(\pm 1{,}84|0)$ und $S_{x3/4}(\pm 3{,}64|0)$ (nicht verlangt)

Ableitungen: $f'(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}(x^2 - 9)(x^2 - 1)$, $f''(x) = -x^3 + 5x$ and $f'''(x) = -3x^2 + 5$

Hochpunkte ($f'(x) = 0$ einfach mit VZW von + nach − oder Symmetrie):

$H_1(-1|\frac{22}{15}) = H_1(-1|1{,}4\overline{6})$ und $H_2(3|\frac{18}{5}) = H_2(3|3{,}6)$

Tiefpunkte ($f'(x) = 0$ einfach mit VZW von − nach + oder Symmetrie):

$T_1(-3|-\frac{18}{5}) = T_1(-3|-3{,}6)$ und $T_2(1|-\frac{22}{15}) = T_2(1|-1{,}4\overline{6})$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$ einfach mit VZW oder $f'''(x) \neq 0 \Rightarrow W_1(0|0)$ und $W_{2/3}(\pm\sqrt{5}|\mp\frac{1}{2}\sqrt{5}) \approx W_{2/3}(\pm 2{,}24|\mp 1{,}12)$

m) $f(x) = \frac{1}{4}x^5 - \frac{25}{12}x^3 + 5x = \frac{1}{4}x(x^4 - \frac{25}{3}x^2 + 20)$

Symmetrie: $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung

Achsenschnittpunkte: $S_2(0|0)$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{5}{4}(x^4 - 5x^2 + 4) = \frac{5}{4}(x^2 - 1)(x^2 - 4)$, $f''(x) = 5x^3 - \frac{25}{2}x = 5x(x^2 - \frac{5}{2})$ und $f'''(x) = 15x^2 - 12$

Hochpunkte ($f'(x) = 0$ mit VZW von – nach + oder $f''(x) < 0$): $H_1(-2|-\frac{4}{3}) \approx H_1(-2|-1{,}\overline{3})$ und $H_2(1|\frac{38}{12}) = H_2(1|3{,}1\overline{6})$,

Tiefpunkte ($f'(x) = 0$ mit VZW von + nach − oder $f''(x) > 0$): $T_1(-1|-\frac{38}{12}) = T_1(-1|-3{,}1\overline{6})$ und $T_2(2|\frac{4}{3}) \approx T_2(2|1{,}\overline{3})$

Wendepunkte ($f''(x) = 0$ einfach mit VZW oder $f'''(x) \neq 0$): $W_1(0|0)$ and $W_{2/3}(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}|\mp\frac{65}{48}\sqrt{\frac{5}{2}}) \approx W_{2/3}(\pm 1{,}58|\mp 2{,}14)$

n) $f(x) = \frac{1}{10}(x + 1)(x - 2)^3 = \frac{1}{10}(x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8)$

Symmetrie: keine

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|-0{,}8)$, $S_{1x}(-1|0)$, $S_{2x}(2|0)$ (dreifach $\Rightarrow$ Sattelpunkt)

$f'(x) = \frac{1}{10}(4x^3 - 15x^2 + 12x + 4) = \frac{1}{10}(4x + 1)(x - 2)^2$, $f''(x) = \frac{3}{5}(2x^2 - 5x + 2) = \frac{3}{5}(2x + 1)(x - 2)$, $f'''(x) = \frac{3}{5}(4x - 5)$

Tiefpunkt: $f'(x) = 0$ mit VZW von + nach − oder $f''(x) > 0 \Rightarrow T(-\frac{1}{4}|-0{,}845)$

Sattelpunkt: $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$ and $f'''(x) \neq 0 \Rightarrow S(2|0)$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$ einfach mit VZW oder $f'''(x) \neq 0 \Rightarrow W(\frac{1}{2}|-0{,}506)$

Aufgabe 2: gemeinsame Punkte von Kurvenscharen

a) $f_t(x) = x^2 + 2tx + 1 - 2t = (x + t)^2 - (t + 1)^2 + 2 \Rightarrow$ Normalparabeln mit $S(-t|-(t + 1)^2 + 2)$ und $S_g(1|2)$

b) $f_t(x) = \frac{1}{x-t} + \frac{t}{t-1} \Rightarrow$ Hyperbeln mit Symmetriezentrum $S(t|\frac{t}{t-1})$ und $S_g(1|0)$

c) $f_t(x) = x^3 + 3x^2 + (3 - t^2)x + 1 + t^2 = (x - 1 + t)(x - 1)(x - 1 - t)$ mit $S_g(1|0)$

Aufgabe 3: Hüllkurven von Geradenscharen

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

Aufgabe 4: Ortskurven von Extrem- und Wendepunkten

a) siehe Skript

b) $T_a(-3|-9+a)$ mit $x = -3$

c) $T_a\left(-\frac{a}{2}\middle|-\frac{a^2}{4}+2\right)$ mit $y = -x^2 + 2$

d) $T_a\left(\frac{4}{a}\middle|-\frac{16}{a}-5\right)$ mit $y = -4x - 5$ für $a \neq 0$. Für $a = 0$ erhält man die Gerade $f_0(x) = -8x - 5$

e) $H_t\left(\frac{4}{t}|t\right)$ mit $y = \frac{4}{x}$ für $t \neq 0$. Für $t = 0$ erhält man die Gerade $f_0(x) = 0$

f) $T_k(k|-\frac{1}{2}k^3 - 3k^2 + 2)$ mit $y = -\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 2$ und $H_k(-2|6k + 6)$ mit $x = -2$ sowie $W(1-\frac{1}{2}k|4(1-\frac{1}{2}k)^3 - 6k(1-\frac{1}{2}k) + 2$ mit $y = 4x^3 - 6kx + 2$

g) $H_a\left(-\sqrt{a}\middle|\frac{2}{\sqrt{a}}\right)$ mit $y = -\frac{2}{x}$ für $x > 0$ und $T_a\left(\sqrt{a}\middle|-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)$ mit $y = -\frac{2}{x}$ für $x < 0$, wobei jeweils $a > 0$. Für $a < 0$ existieren keine Extrema. $W(0|0)$ hat keine Ortskurve

h) $H_t\left(t\middle|\frac{2}{3}t^2\right)$ mit $y = \frac{2}{3}x^2$ und $T_t(3t|0)$ mit $y = 0$ sowie $W_t(2t|\frac{1}{3}t^2)$ mit $y = \frac{1}{12}x^2$.

i) $H(0|0)$ und $T_a\left(\frac{2}{3a}\middle|-\frac{4}{27a^2}\right)$ mit $y = -\frac{1}{3}x^2$ sowie $W_a\left(\frac{1}{3a}\middle|-\frac{2}{27a^2}\right)$ mit $y = -\frac{2}{3}x^2$

j) $T_b\left(-\frac{3}{4}b\middle|-\frac{27}{256}b^4\right)$ mit $y = -\frac{1}{3}x^4$ und $W_a\left(-\frac{1}{2}b\middle|-\frac{1}{16}b^4\right)$ mit $y = x^4$.

k) $T_t(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{t}|-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{t} + 1)$ mit $y = \frac{4}{3}x + 1$ und $H_t(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{t}|\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{t} + 1)$ mit $y = \frac{4}{3}x + 1$ sowie $W(0|1)$

l) $E_t(2t|\frac{1}{4t})$ mit $y = \frac{1}{2x}$, HP für $t > 0$ bzw. TP für $t < 0$ und $W_t(3t|\frac{2}{9t})$ mit $y = \frac{2}{3x}$

Aufgabe 5: Bestimmung von Funktionsgleichungen

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit: Symmetrie zu O(0|0) $\Rightarrow$ b = 0 und d = 0 $f(2) = 0 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 0$ $f'(0) = 2 \Rightarrow c = 2$ $\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x$	b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit: $f(-2) = -2 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = -2$ $f'(-2) = 0 \Rightarrow 12a - 4b + c = 0$ $f(0) = -4 \Rightarrow d = -4$ $f''(0) = 0 \Rightarrow b = 0$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x - 4$
c) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit: $f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ $f(3) = 3 \Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = 0$ $f'(3) = 1 \Rightarrow 27a + 6b + c = 1$ $f''(3) = 0 \Rightarrow 18a + 2b = 0$ $\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 1$	d) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit: $f(4) = 0: \Rightarrow 64a + 16b + 4c + d = 0$ $f(2) = 7: \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 7$ $f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$ $f(1) = \frac{27}{4} \Rightarrow a + b + c + d = \frac{27}{4}$ $f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$ $\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 3x + 8$
e) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit: $f(1) = \frac{5}{4} \Rightarrow a + b + c + d = \frac{5}{4}$ $f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$ $f(-1) = g(-1) = \frac{13}{4} \Rightarrow -a + b - c + d = \frac{13}{4}$ $f'(-1) = 1 \Rightarrow 3a - 2b + c = 1$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + 3$	f) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit: Symmetrie zur y-Achse $\Rightarrow$ b = 0 und d = 0 $f(1) = 2 \Rightarrow a + b + c + d + e = 2$ $f'(1) = 0 \Rightarrow 4a + 3b + 2c + d = 0$ $f''(1) = 0 \Rightarrow 12a + 6b + 2c = 0$ $\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}$
g) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit: $f(2) = 0 \Rightarrow 16a + 8b + 4c + 2d + e = 0$ $f'(2) = 0 \Rightarrow 32a + 12b + 4c + d = 0$ $f''(2) = 0 \Rightarrow 48a + 12b + 2c = 0$ $f(0) = 0 \Rightarrow e = 0$ $f'(0) = 8 \Rightarrow d = 8$ $\Rightarrow f(x) = -x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 8x$	h) $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ mit: Punktsymmetrie zu O(0|0) $\Rightarrow$ b = d = f = 0, $f(2) = \frac{64}{25} \Rightarrow 32a + 16b + 8c + 4d + 2e + f = \frac{64}{25}$ $f'(2) = 0 \Rightarrow 80a + 32b + 12c + 4d + e = 0$ $f''(2) = 0 \Rightarrow 160a + 48b + 12c + 2d = 0$ $\Rightarrow f(x) = \frac{3}{100}x^5 - \frac{2}{5}x^3 + \frac{12}{5}x$
i) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit: $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$ und $f'(0) = \frac{3}{2}t \Rightarrow c = \frac{3}{2}t$ $f(3t) = 0: \Rightarrow 27t^3a + 9t^2b + 3tc + d = 0$ $f'(3t) = 0 \Rightarrow 27t^2a + 6tb + \frac{3}{2}t = 0$ $\Rightarrow f_t(x) = \frac{1}{6t}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}tx$	j) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit: Punktsymmetrie zu O(0|0) $\Rightarrow$ b = d = 0 und $f(2) = 4 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 4$ $\Rightarrow f_a(x) = ax^3 + (2 - 4a)x$

Aufgabe 6: Extremwertaufgaben

a) <u>Fläche</u> $A(u) = \frac{1}{2}(f(u) - 0)(5 - u) = \frac{1}{8}(u^3 - 7u^2 - 5u + 75)$, $A'(u) = \frac{1}{8}(3u^2 - 14u - 5)$, $A''(u) = \frac{1}{4}(3u - 7) \Rightarrow$ rel Max bei $u = -\frac{1}{3}$ Bereichsgrenzen $A(0) = \frac{75}{8}$ und $A(1) = \frac{64}{8} \Rightarrow$ abs Max bei u = 0.

b) Normalparabeln mit $S_f(2|-2)$ und $S_g(4|2)$, die sich in $S_g(4|2)$ schneiden (rechte Bereichsgrenze)

<u>Fläche</u> $A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (u-1) \cdot (f(u) - g(u)) = -2u^2 + 10u - 8$, $A'(u) = -4u + 10$, $A''(u) = -4 \Rightarrow$ relatives Max bei $u = \frac{5}{2}$ mit $A(\frac{5}{2}) = \frac{9}{2}$ mit Bereichsgrenzen: $A(1) = 0$ und $A(4) = 0 \Rightarrow$ absolutes Max bei $u = \frac{5}{2}$.

Aufgabe 7: Extremwertaufgaben mit Abstand und Fläche zwischen zwei Schaubildern

a) <u>Abstand</u> $PQ(u) = g(u) - f(u) = -2u^2 + 6u$, $PQ'(u) = -4u + 6$, $PQ''(u) = -4 \Rightarrow$ relatives Max bei $u = \frac{3}{2}$ (außerhalb) mit $PQ(\frac{3}{2}) = 4{,}5$ und Bereichsgrenzen: $PQ(0) = 0$ und $PQ(1) = 4 \Rightarrow$ absolutes Max bei $u = 1$.

<u>Fläche</u> $A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (u-0) \cdot (g(u) - f(u)) = -u^3 + 3u^2$, $A'(u) = -3u^2 + 6u$, $A''(u) = -6u + 6 \Rightarrow$ relatives Max bei $u = 2$ mit $A(2) = 4$ (außerhalb) und Bereichsgrenzen: $A(0) = 0$ und $A(1) = 2 \Rightarrow$ abs Max bei $u = 1$.

b) $g(x) = x(x-2)^2$ hat $HP(\frac{2}{3}|\frac{32}{27})$ und $TP(0|2)$. Schnittpunkte bei $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 4 \Rightarrow$ 2 Bereiche:

Bereich $0 \le u \le 1$:

<u>Abstand</u> $PQ(u) = g(u) - f(u) = u^3 - 5u^2 + 4u$, $PQ'(u) = 3u^2 - 10u + 4$, $PQ''(u) = 6u - 10 \Rightarrow$ rel Max bei $u = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{13}{9}} \approx 0{,}46$ mit $PQ(0{,}46) \approx 0{,}88$ und Bereichsgrenzen: $PQ(0) = 0$ und $PQ(1) = 0 \Rightarrow$ abs Max bei $u \approx 0{,}46$.

<u>Fläche</u> $A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (u-0) \cdot (g(u) - f(u)) = \frac{1}{2}u^4 - \frac{5}{2}u^3 + 2u^2$, $A'(u) = 2u^3 - \frac{15}{2}u^2 + 4u$, $A''(u) = 6u^2 - 15u + 4 \Rightarrow$ relatives Max bei $u = \frac{15}{8} - \sqrt{\frac{97}{64}} \approx 0{,}64$ mit $A(0{,}64) \approx 0{,}25$ und Bereichsgrenzen: $A(0) = 0$ und $A(1) = 0 \Rightarrow$ absolutes Max bei $u \approx 0{,}64$.

Bereich $1 \le u \le 4$:

<u>Abstand</u> $PQ(u) = f(u) - g(u) = -u^3 + 5u^2 - 4u$, $PQ'(u) = -3u^2 + 10u - 4$, $PQ''(u) = -6u + 10 \Rightarrow$ rel Max bei $u = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{13}{9}} \approx 2{,}87$ mit $PQ(2{,}87) \approx 6{,}06$ und Bereichsgrenzen: $PQ(1) = 0$ und $PQ(4) = 0 \Rightarrow$ abs Max bei $u \approx 2{,}87$.

<u>Fläche</u> $A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (u-0) \cdot (f(u) - g(u)) = -\frac{1}{2}u^4 + \frac{5}{2}u^3 - 2u^2$, $A'(u) = -2u^3 + \frac{15}{2}u^2 - 4u$, $A''(u) = -6u^2 + 15u - 4 \Rightarrow$ relatives Max bei $u = \frac{15}{8} + \sqrt{\frac{97}{64}} \approx 3{,}11$ mit $A(3{,}11) \approx 9{,}08$ und Bereichsgrenzen: $A(1) = 0$ und $A(4) = 0 \Rightarrow$ absolutes Max bei $u \approx 3{,}11$.

Aufgabe 8: Extremwertaufgaben mit selbst gewählten Koordinaten

a) <u>Fläche</u> $A(u) = g \cdot h = (u - (-u)) \cdot (f(u) - 0) = -2u^3 + 8u$, $A'(u) = -6u^2 + 8$, $A''(u) = -12u \Rightarrow$ relatives Max bei $u = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}15$ mit $A(1{,}15) \approx 6{,}16$ und Bereichsgrenzen: $A(-2) = 0$ und $A(2) = 0 \Rightarrow$ absolutes Max bei $u \approx 1{,}15$. (= Abstand rechte bzw. linke Seite zur y-Achse $x = 0$)

b) <u>Fläche</u>: $A(u) = b(u) \cdot h(u) = 2u \cdot (-f(u)) = -2u^5 + 10u^3 + 40u$, $A'(u) = -10u^4 + 30u^2 + 40$, $A''(u) = -40u^3 + 60u \Rightarrow$ relatives Maximum bei $u = 2$ und Bereichsgrenzen: $2{,}23 \approx \sqrt{5} \le u \le \sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{105}{4}}} \approx 2{,}76$ mit $A(\sqrt{5}) = 40\sqrt{5} \approx 89{,}44$ (Rechteck mit $b = 2\sqrt{5}$ und $h = 20$) und $A(2{,}76) = 0 \Rightarrow$ abs Max bei $u = \sqrt{5}$.

c) <u>Fläche</u> $A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (u - (-u)) \cdot (1 - f(u)) = -u^3 + 4u$, $A'(u) = -3u^2 + 4$, $A''(u) = -6u \Rightarrow$ relatives Max bei $u = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}15$ mit $A(1{,}15) \approx 3{,}44$ mit Bereichsgrenzen: $A(0) = 0$ und $A(2) = 0 \Rightarrow$ absolutes Max bei $u = \sqrt{\frac{4}{3}}$.

d) Schnittpunkte (f(x) = g(x)): $S_{1/2}(\pm 3|-3)$
Fläche: $A(u) = b(u)\cdot h(u) = 2u\cdot[f(u) - g(u)] = 2u\cdot[9 - u^2] = -2u^3 + 18u \Rightarrow$ relatives Max bei $u = \sqrt{3}$ mit $A(\sqrt{3}) = 12\cdot\sqrt{3}$.
und Bereichsgrenzen: $A(0) = 0$ und $A(3) = 0 \Rightarrow$ absolutes Max bei $u = \sqrt{3}$

Aufgabe 9: Extremwertaufgaben mit Verschiebungen

a) $f(x + 2) = -x^2 + 1$. Fläche: $A(u) = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 2u\cdot f(2 + u) = -u^3 + u$, $A'(u) = -3u^2 + 1$ und $A''(u) = -6u \Rightarrow$ relatives Max bei u $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ mit $A(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ mit Bereichsgrenzen: $A(1) = 0$ und $A(0) = 0 \Rightarrow$ abs Max für $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) Fläche $A(u) = g\cdot h = (2+u - (2-u))\cdot(f(2+u) - 0) = -2u^3 + 8u$, $A'(u) = -6u^2 + 8$, $A''(u) = -12u \Rightarrow$ relatives Max bei $u = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}15$ mit $A(1{,}15) \approx 6{,}16$ und Bereichsgrenzen: $A(0) = 0$ und $A(4) = 0 \Rightarrow$ absolutes Max bei $u \approx 1{,}15$.

Aufgabe 10: Extremwertaufgabe mit Kurvenschar

Fläche: $A_t(u) = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot(t - u)\cdot(0 - f_t(u)) = -\frac{1}{2}\cdot(t - u)\cdot u^2\cdot(u - t) = \frac{1}{2}u^4 - tu^3 + \frac{1}{2}t^2u^2$ mit $A_t'(u) = 2u^3 - 3tu^2 + t^2u \Rightarrow$ rel Max bei $u = \frac{1}{2}t$ mit $A_t(\frac{1}{2}t) = \frac{t^4}{32}$ und Grenzen: $A_t(0) = A_t(t) = 0 \Rightarrow$ abs Max bei $u = \frac{1}{2}t$

Aufgabe 11: Anwendungsaufgaben

a) Absatz $A(x) = 60\,000 - 8\,000\cdot(x - 45) = -8\,000\cdot x + 420\,000$ mit x = Verkaufspreis in € $\Rightarrow$ Gewinn $G(x) = (x - 22)\cdot A(x) = -8\,000\cdot x^2 + 596\,000x - 9\,240\,000 = -8\,000(x^2 - 74{,}5x + 1155) \Rightarrow$ relatives Maximum am Scheitelpunkt bei x = 37,25 € mit A(37,25) = 122 000 verkauften Exemplaren und Gewinn G(37,25) = 1 860 500 €

b) Fläche $A(u) = u\cdot(200 - u) = -u^2 + 200u$ ist maximal bei $u = 100 \Rightarrow$ Die Fläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 100 m.

c) Länge $L(u) = 2\cdot u + 2\cdot\frac{400}{u}$ mit $L'(u) = 2 - \frac{800}{u^2}$ ist maximal bei $u = 20 \Rightarrow$ Die Fläche muss quadratisch sein mit der Seitenlänge u = 20 m.

d) Nach dem Strahlensatz gilt für ein Rechteck mit der Breite b und der Höhe h: $\frac{8}{b} = \frac{6}{6-h} \Leftrightarrow b = \frac{8}{6}(6 - h) = 8 - \frac{4}{3}h$. Die Fläche $A(h) = b\cdot h = 8h - \frac{4}{3}h^2$ ist maximal bei h = 3 cm und b = 4 cm mit dem Flächeninhalt A = 12 cm². Nach dem Prinzip von Cavalieri oder wieder nach den Strahlensatz ändert sich dieses Ergebnis nicht, wenn man die Spitze des Dreiecks parallel zur Basis verschiebt.

e) Fläche $A(u) = u\cdot(80 - \frac{1}{2}u) = -\frac{1}{2}(u^2 - 160u)$ ist maximal mit Länge u = 80 cm und Höhe 40 cm, d.h. man kann in diesem Fall einfach den oberen Streifen wegschneiden!

f) Tragfähigkeit: $T(x) = k\cdot x\cdot y^2 = k\cdot x\cdot(d^2 - x^2)$ (Pythagoras) $= k\cdot d^2\cdot x - k\cdot x^3$ mit $T'(x) = kd^2 - 3kx^2 \Rightarrow$ rel Max bei $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ mit $T(\frac{d}{\sqrt{3}}) = \frac{2kd^3}{3\sqrt{3}}$ und Bereichsgrenzen: $T(0) = 0$ und $T(r) = 0 \Rightarrow$ abs Max für $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$

g) Zylindervolumen: $V(h) = \pi\cdot r^2\cdot h = \pi\left(R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right)\cdot h$ (Pythagoras) $= \pi\cdot R^2\cdot h - \frac{1}{4}\pi\cdot h^3 \Rightarrow$ rel Max bei $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$ mit $V(\frac{2}{\sqrt{3}}R) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ und Grenzen: $V(0) = 0$ und $V(R) = 0$. $\Rightarrow$ abs. Max für $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$.

h) Zylindervolumen $V = \pi\cdot r^2\cdot h$, Zylinderoberfläche $A(r) = 2\cdot\pi\cdot rh + 2\pi\cdot r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi\cdot r^2$ mit $A'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r \Rightarrow$ rel Max bei $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ mit $A\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ und Grenzen $\lim\limits_{r\to\infty} A(r) = \lim\limits_{r\to 0} = 0 \Rightarrow$ abs Min für $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \approx 5{,}42$ cm und $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r \approx 10{,}84$ cm. Zum Vergleich: Kugelradius $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx 6{,}20$ cm

Aufgabe 12: Newton-Verfahren

a) $x_0 = 1$, $x_1 = -2$, $x_3 = -1{,}4375$, $x_4 = -1{,}2130$, $x_5 = -1{,}1756$
b) $x_0 = 2$, $x_1 = 1{,}6458$, $x_3 = -1{,}4307$, $x_4 = -1{,}3312$, $x_5 = -1{,}3078$, $x_6 = 1{,}3066$
c) $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}5$, $x_3 = 1{,}3478$, $x_4 = 1{,}3253$, $x_5 = 1{,}3247$