5.3. Abstrakte Anwendungsaufgaben

Aufgabe 1

In den Raum zwischen der x-Achse und dem Graphen von $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{13}{8}$ soll ein Rechteck möglichst großer Fläche gelegt werden, dessen Ecken auf dem Graphen liegen. Wie breit ist das Rechteck?

Lösung:

Die Fläche $A(u) = 2\cdot u\cdot f(u)$ ist maximal für $u = 1$.

Aufgabe 2

In den Raum zwischen der x-Achse und dem Graphen von $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{8}$ soll ein Rechteck möglichst großer Fläche gelegt werden, dessen Ecken auf dem Graphen liegen. Wie breit ist das Rechteck?

Lösung:

Die Fläche $A(u) = -2\cdot u\cdot f(u)$ ist monoton steigend, so dass das Rechteck so breit wie möglich bemessen wird, ohne den Graphen zu schneiden. Die Ecken liegen dann auf den Hochpunkten von f bei $u = 1$.

Aufgabe 3

Die Senkrechte $x = u$ mit $0 \le u \le 2$ schneidet die x-Achse im Punkt P und $f(x) = -x^2 + 4x$ im Punkt Q. Für welches u wird die Fläche des Dreiecks OPQ maximal?

Lösung

Fläche $A(u) = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot(u-0)\cdot(f(u) - g(u)) = -u^3 + 4u^2$, $A'(u) = -3u^2 + 8u$, $A''(u) = -6u + 8$

$\Rightarrow$ relatives Max bei $u = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$ (außerhalb) mit $A(2{,}67) \approx 9{,}48$, Bereichsgrenzen: $A(0) = 0$ und $A(2) = 8$

$\Rightarrow$ absolutes Max bei $u = 2$.

Aufgabe 4 (5)

In den Raum zwischen der x-Achse und der Parabel $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ soll ein rechtwinkliges Dreieck maximaler Fläche gelegt werden. Dabei soll eine Ecke im Ursprung liegen und eine Kathete auf der x-Achse verlaufen. Gib die Breite, die Höhe und die Fläche dieses Dreiecks an.

Lösung

Fläche $A(u) = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot(u-0)\cdot(0 - f(u)) = -\frac{1}{4}u^3 + u^2$ (1)

Ableitungen $A'(u) = -\frac{3}{4}u^2 + 2u$ und $A''(u) = -\frac{3}{2}u + 2$ (1)

$\Rightarrow$ relatives Max bei $u = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$ LE mit $A(\frac{8}{3}) = \frac{64}{27} \approx 2{,}37$ FE und $f(\frac{8}{3}) = -\frac{16}{9} \approx -1{,}78$ LE (2)

Bereichsgrenzen: $A(0) = 0$ und $A(4) = 0 \Rightarrow$ absolutes Max bei $u = \frac{8}{3}$ (1)

Aufgabe 5 (5)

In den Raum zwischen der x-Achse und der Parabel $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$ soll ein rechtwinkliges Dreieck maximaler Fläche gelegt werden. Dabei soll eine Ecke im Ursprung liegen und eine Kathete auf der x-Achse verlaufen. Gib die Breite, die Höhe und die Fläche dieses Dreiecks an.

Lösung

Fläche $A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (0 - u) \cdot (f(u) - 0) = \frac{1}{4} u^3 + u^2$ (1)

Ableitungen $A'(u) = \frac{3}{4} u^2 + 2u$ und $A''(u) = \frac{3}{2} u + 2$ (1)

$\Rightarrow$ relatives Max bei $u = -\frac{8}{3} \approx -2{,}67$ LE mit $A(-\frac{8}{3}) = \frac{64}{27} \approx 2{,}37$ FE und $f(-\frac{8}{3}) = \frac{16}{9} \approx 1{,}78$ LE (2)

Bereichsgrenzen: $A(0) = 0$ und $A(-4) = 0 \Rightarrow$ absolutes Max bei $u = -\frac{8}{3}$ (1)

Aufgabe 6

Die Senkrechte $x = u$ schneidet $f(x) = 0{,}5x^2$ im Punkt B und $g(x) = -0{,}5x^2$ im Punkt C. Außerdem ist der Punkt $A(2|-1)$ gegeben. Für welches u mit $0 \le u \le 2$ wird die Fläche des Dreiecks ABC maximal?

Lösung

<u>Fläche</u> $A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (2 - u) \cdot (f(u) - g(u)) = -\frac{1}{2} u^3 + u^2$, $A'(u) = -\frac{3}{2} u^2 + 2u$, $A''(u) = -3u$.

$\Rightarrow$ relatives Max bei $u = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}15$ mit $A(1{,}15) \approx 0{,}56$, Bereichsgrenzen: $A(0) = 0$ und $A(2) = 0$

$\Rightarrow$ absolutes Max bei $u = \sqrt{\frac{4}{3}}$.

Aufgabe 7

In den Raum zwischen den Parabeln $f(x) = 0{,}5x^2 - 1$ und $g(x) = -0{,}5x^2 + 3$ soll ein Rechteck maximaler Fläche einbeschrieben werden, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Welchen Flächeninhalt hat dieses Rechteck?

Lösung

<u>Fläche</u> $A(u) = g \cdot h = (u - (-u)) \cdot (g(u) - f(u)) = -2u^3 + 8u$ (1)

Ableitungen: $A'(u) = -6u^2 + 8$, $A''(u) = -12u$. (1)

$\Rightarrow$ relatives Max bei $u = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}15$ mit Breite $g = 2\sqrt{\frac{4}{3}} \approx 2{,}3$, Höhe $h = g(\sqrt{\frac{4}{3}}) - f(\sqrt{\frac{4}{3}}) = \frac{8}{3} \approx 2{,}32$ und

Fläche $A(\sqrt{\frac{4}{3}}) = \frac{16}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} \approx 6{,}16$ (1)

Bereichsgrenzen: $A(0) = 0$ und $A(2) = 0 \Rightarrow$ absolutes Max bei $u = \sqrt{\frac{4}{3}}$ (1)

Aufgabe 8 (5)

In den Raum zwischen der Parabeln $f(x) = -x^2 + 4$ und der x-Achse soll ein Rechteck maximaler Fläche einbeschrieben werden, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen und das den Punkt $P(1|2)$ nicht enthält. Welchen Flächeninhalt hat dieses Rechteck? Hinweis: Zeichne die Parabel und den Punkt mit 1 LE = 1 cm. Skizziere dann einige mögliche Rechtecke.

Lösung

<u>Fläche</u> $A(u) = g \cdot h = (u - (-u)) \cdot (f(u) - 0) = 2u \cdot f(u) = -2u^3 + 8u$ (1)

<u>Erlaubter Bereich</u> $0 \le u \le 1$ oder $0 \le f(u) \le 3$ (1)

<u>rel Max</u> bei $u = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}15 > 1$ mit $f(\sqrt{\frac{4}{3}}) = \frac{8}{3} \approx 2{,}7 > 2$ liegt außerhalb des erlaubten Bereiches (1)

Das maximale Rechteck muss also an der Grenze des erlaubten Bereiches liegen, d.h., entweder $u = 1$ und $f(u) = 3$ mit Fläche $A(1) = 6$ FE oder $u = \sqrt{2}$ und $f(u) = 2$ mit Fläche $A(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \approx 5{,}65$ FE. Die erste Möglichkeit ist besser! (2)

Aufgabe 9

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 2x - 15)$. Bestimme das $u \geq 0$, für das das rechtwinklige Dreieck mit den Ecken $A(u|f(u))$, $B(u|0)$ und $C(5|0)$ einen maximalen Flächeninhalt bekommt.

Lösung

Dreiecksfläche: $A(u) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (5-u) \cdot f(u) = \frac{1}{8}(u^3 - 7u^2 - 5u + 75)$.

Gesucht: absolutes Maximum von $A(u)$ im Bereich $0 \leq u \leq 5$.

kein relatives Maximum im Bereich vorhanden. (Hochpunkt bei $u = -\frac{1}{3}$ und Tiefpunkt bei $u = 5$)

Bereichsgrenzen: $A(0) = \frac{75}{8}$ und $A(5) = 0 \Rightarrow$ absolutes Maximum bzw. maximale Fläche für $u = 0$.

Aufgabe 10 (4)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -\frac{3}{16}x^3 + \frac{9}{4}x$. Bestimme das $u \;\varepsilon\; [0, \sqrt{12}\,]$, für das das rechtwinklige Dreieck mit den Ecken $A(u|f(u))$, $B(u|0)$ und $C(0|0)$ einen maximalen Flächeninhalt bekommt.

Lösung

Dreiecksfläche: $A(u) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u) = -\frac{3}{32}u^4 + \frac{9}{8}u^2$. (1)

relatives Maximum ($A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$) bei $u = \sqrt{6}$ mit $A(\sqrt{6}) = \frac{27}{8}$. (2)

(Ein weiterer Hochpunkt liegt außerhalb des Bereiches bei $u = -\sqrt{6}$;ein Tiefpunkt liegt außerdem an der Bereichsgrenze bei $u = 0$)

Bereichsgrenzen: $A(0) = 0$ und $A(\sqrt{12}\,) = 0 \Rightarrow$ absolutes Maximum bzw. maximale Fläche bei $u = \sqrt{6}$. (1)

Aufgabe 11

Gegeben sind die beiden Parabeln $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x^2 + 4x$ sowie der Punkt $A(-2|0)$. Die Senkrechte $x = u$ mit $0 \leq u \leq 2$ schneidet f im Punkt B und g im Punkt C.

a) Für welches u wird die Länge der Strecke $\overline{BC}$ maximal? (7)

b) Für welches u wird die Fläche des Dreiecks ABC maximal? (8)

Hinweis: g hat den Scheitelpunkt $S_g(2|4)$.

Lösung

a) $BC(u) = g(u) - f(u) = -2u^2 + 4u$, $BC'(u) = -4u + 4$ und $BC''(u) = -4 \Rightarrow$ relatives Maximum ($BC'(u) = 0$ und $BC''(u) < 0$) bei $u = 1$. Bereichsgrenzen: $BC(0) = 0$, $BC(1) = 2$, $BC(2) = 0 \Rightarrow$ absolutes Maximum bei $u = 1$.

b) $A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot [g(u) - f(u)] \cdot [u - (-2)] = \frac{1}{2} \cdot [-2u^2 + 4u] \cdot [u + 2] = -u^3 + 4u$, $A'(u) = -3u^2 + 4$ und $A''(u) = -6u \Rightarrow$ relatives Maximum ($A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$) bei $u = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Bereichsgrenzen: $A(0) = 0$, $A(\frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{16}{3\sqrt{3}}$, $A(2) = 0 \Rightarrow$ absolutes Maximum bei $u = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Aufgabe 12

Gegeben sind die beiden Parabeln $f(x) = x^2 - 4x$ und $g(x) = -x^2$ sowie der Punkt $A(-2|0)$. Die Senkrechte $x = u$ mit $0 \leq u \leq 2$ schneidet f im Punkt B und g im Punkt C.

a) Für welches u wird die Länge der Strecke $\overline{BC}$ maximal? (7)

b) Für welches u wird die Fläche des Dreiecks ABC maximal? (8)

Hinweis: f hat den Scheitelpunkt $S_f(2|-4)$.

Lösung
gleicher Ansatz, gleiche Rechnung, gleiches Ergebnis wie in Aufgabe 11

Aufgabe 13

Gegeben sind die beiden Parabeln $f(x) = x^2 - 4$ und $g(x) = -x^2 + 4$ sowie der Punkt $A(2|0)$. Die Senkrechte $x = u$ mit $-2 \le u \le 2$ schneidet f im Punkt B und g im Punkt C. Für welches u wird die Fläche des Dreiecks ABC maximal? Berechnen Sie die maximale Fläche.

Lösung

$A(u) = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot[g(u) - f(u)]\cdot[2 - u] = \frac{1}{2}\cdot[-2u^2 + 8]\cdot[-u + 2] = u^3 - 2u^2 - 4u + 8$, $A'(u) = 3u^2 - 4u - 4$ und $A''(u) = 6u - 4 \Rightarrow$ relatives Maximum ($A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$) bei $u = -\frac{2}{3}$. Bereichsgrenzen: $A(-2) = 0$, $A(-\frac{2}{3}) = \frac{256}{27}$, $A(2) = 0 \Rightarrow$ absolutes Maximum bei $u = -\frac{2}{3}$

Aufgabe 14

Gegeben sind die beiden Parabeln $f(x) = x^2 - 6$ und $g(x) = -x^2 + 2$ sowie der Punkt $A(-2|0)$. Die Senkrechte $x = u$ schneidet g im Punkt B und f im Punkt C. Für welches u wird die Fläche des Dreiecks ABC maximal? Berechnen Sie die maximale Fläche.

Lösung

$A(u) = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot[g(u) - f(u)]\cdot[u - (-2)] = \frac{1}{2}\cdot[-2u^2 + 8]\cdot[u + 2] = -u^3 - 2u^2 + 4u + 8$, $A'(u) = -3u^2 - 4u + 4$ und $A''(u) = -6u - 4 \Rightarrow$ relatives Maximum ($A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$) bei $u = \frac{2}{3}$. Bereichsgrenzen: $A(-2) = 0$, $A(\frac{2}{3}) = \frac{256}{27}$, $A(2) = 0 \Rightarrow$ absolutes Maximum bei $u = \frac{2}{3}$

Aufgabe 15 (10)

Gegeben sind die Parabeln $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ und $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$. Zeichne die Schaubilder von f und g in ein gemeinsames Koordinatensystem mit $-2 \le x \le 2$, $-1 \le x \le 4$ und 1 LE = 2 cm. Für welches u mit $0 < u < \sqrt{3}$ hat das Rechteck mit den Ecken $E_1(-u|f(-u))$, $E_2(u|f(u))$, $E_3(u|g(u))$ und $E_4(-u|g(-u))$ einen maximalen Flächeninhalt? Wie groß ist dieser Flächeninhalt?

Lösung

$A(u) = b\cdot h = 2u\cdot[f(u) - g(u)] = -\frac{4}{3}u^3 + 4u \Rightarrow A'(u) = -4u^2 + 4$ und $A''(u) = -8u \Rightarrow$ rel Max bei $u = 1$ mit $A(1) = \frac{8}{3}$ FE. Randwerte: $A(0) = A(\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow$ abs. Max bei $u = 1$

Aufgabe 16 (10)

Gegeben sind die Parabeln $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 4$ und $g(x) = \frac{1}{6}x^2 + 1$. Zeichne die Schaubilder von f und g in ein gemeinsames Koordinatensystem mit $-3 \le x \le 3$, $-1 \le x \le 5$ und 1 LE = 1 cm.
Für welches u mit $0 < u < \sqrt{6}$ hat das Rechteck mit den Ecken $E_1(-u|f(-u))$, $E_2(u|f(u))$, $E_3(u|g(u))$ und $E_4(-u|g(-u))$ einen maximalen Flächeninhalt? Wie groß ist dieser Flächeninhalt?

Lösung

$A(u) = b\cdot h = 2u\cdot[f(u) - g(u)] = -u^3 + 6u \Rightarrow A'(u) = -u^2 + 6$ und $A''(u) = -6u \Rightarrow$ rel Max bei $u = \sqrt{2}$ mit $A(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$ FE. Randwerte: $A(0) = A(\sqrt{6}) = 0 \Rightarrow$ abs. Max bei $u = \sqrt{2}$

Aufgabe 17 (4)

In den Raum zwischen der x-Achse und dem Schaubild von $f_5(x) = -\frac{1}{5}(x + 1)^2 \cdot (x - 5)$ soll ein rechtwinkliges Dreieck gelegt werden, dessen Katheten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt, den dieses Dreieck haben kann.

Lösung

$A(u) = \frac{1}{2}[f_5(u) - 0] \cdot [5 - u] = \frac{1}{10}(u + 1)^2(u - 5)^2 = \frac{1}{10}(u^4 - 8u^3 + 6u^2 + 40u + 25)$ (1)

$A'(u) = \frac{2}{5}(u^3 - 6u^2 + 3u + 10) = \frac{2}{5}(u + 1)(u - 2)(u - 5)$ (0,5)

$A''(u) = \frac{6}{5}(u^2 - 4u + 1) = \frac{6}{5}(u - 2 - \sqrt{3})(u + 2 + \sqrt{3})$ (0,5

$\Rightarrow$ rel Max bei $u = 2$ mit $A(2) = \frac{81}{10}$ FE. Grenzen: $A(-1) = A(5) = 0 \Rightarrow$ abs Max bei $u = 2$ (1)

Aufgabe 18 (4)

In den Raum zwischen der x-Achse und dem Schaubild von $f_{-5}(x) = -\frac{1}{5}(x - 1)^2 \cdot (x - 5)$ soll ein rechtwinkliges Dreieck gelegt werden, dessen Katheten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt, den dieses Dreieck haben kann.

Lösung

$A(u) = \frac{1}{2}[f_{-5}(u) - 0] \cdot [5 - u] = \frac{1}{10}(u - 1)^2(u - 5)^2 = \frac{1}{10}(u^4 - 12u^3 + 46u^2 - 60u + 25)$ (1)

$A'(u) = \frac{2}{5}(u^3 - 9u^2 + 23u - 15) = \frac{2}{5}(u - 1)(u - 3)(u - 5)$ (0,5)

$A''(u) = \frac{6}{5}(u^2 - 6u + \frac{23}{3}) = \frac{6}{5}(u - 3 - \frac{2}{\sqrt{3}})(u + 3 + \frac{2}{\sqrt{3}})$ (0,5)

$\Rightarrow$ rel Max bei $u = 3$ mit $A(2) = \frac{16}{10}$ FE. Grenzen: $A(1) = A(5) = 0 \Rightarrow$ abs Max bei $u = 3$ (1)