

5.3. Prüfungsaufgaben zur Bestimmung von Funktionsgleichungen

Aufgabe 1 (4)

Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion 2. Grades, die in $T(-1 | -4)$ einen Tiefpunkt und in $Q(2 | 0,5)$ einen weiteren Punkt besitzt.

Lösung

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 4 = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{7}{2} \quad (4)$$

Aufgabe 2 (4)

Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion 2. Grades, die in $H(1 | 4)$ einen Hochpunkt und in $Q(2 | 3,5)$ einen weiteren Punkt besitzt.

Lösung

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - 4 = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{9}{2} \quad (4)$$

Aufgabe 3 (5)

Eine Parabel 3. Grades schneidet die x -Achse bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 6$. An der linken Nullstelle befindet sich ein Tiefpunkt der Parabel. An der rechten Nullstelle kann eine Tangente mit der Steigung -9 angelegt werden. Bestimme die Gleichung der Parabel.

Lösung

4 Bedingungen bestimmen eine Parabel 3. Ordnung:

$$1) \quad \text{Kurve geht durch } P(6|0) \Rightarrow f(6) = 216a + 36b + 6c + d = 0 \quad (1)$$

$$2) \quad \text{Kurve geht durch } O(0|0) \Rightarrow f(0) = d = 0 \quad (1)$$

$$3) \quad \text{Steigung in } P \text{ ist } -9 \Rightarrow f'(6) = 108a + 12b + c = -9 \quad (1)$$

$$4) \quad \text{Steigung in } O \text{ ist } 0 \Rightarrow f'(0) = c = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \quad (1)$$

Aufgabe 4 (5)

Eine Parabel dritter Ordnung geht durch den Punkt $P(9|0)$. Die Tangente in P hat die Steigung -9 . Der Ursprung $O(0|0)$ ist Tiefpunkt der Parabel. Bestimme die Gleichung der Parabel.

Lösung

4 Bedingungen bestimmen eine Parabel 3. Ordnung:

$$1) \quad \text{Kurve geht durch } P(9|0) \Rightarrow f(9) = 0 \quad 0 = 729a + 81b + 9c + d \quad (1)$$

$$2) \quad \text{Kurve geht durch } O(0|0) \Rightarrow f(0) = 0 \quad 0 = d \quad (1)$$

$$3) \quad \text{Steigung in } P \text{ ist } -9 \Rightarrow f'(9) = -9 \quad -9 = 243a + 18b + c \quad (1)$$

$$4) \quad \text{Steigung in } O \text{ ist } 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \quad 0 = c \quad (1)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + x^2 \quad (1)$$

Aufgabe 5

Das Schaubild einer Parabel 4. Grades soll nach oben geöffnet sein und bei $x_{1/2} = \pm 1$ sowie $x_{3/4} = \pm 2$ die x -Achse schneiden. Geben Sie alle Funktionen an, die diesen Anforderungen genügen. (4)

Lösung

Ansatz 1: $f_t(x) = t(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = t(x^2-1)(x^2-4) = tx^4 - 5tx^2 + 4t$ mit $t > 0$

Ansatz 2: $f_t(x) = a_t x^4 + b_t x^3 + c_t x^2 + d_t x + e_t$ mit

$$\begin{aligned} 0 &= a_t + b_t + c_t + d_t + e_t \\ 0 &= a_t - b_t + c_t - d_t + e_t \\ 0 &= 16a_t + 8b_t + 4c_t + 2d_t + e_t \\ 0 &= 16a_t - 8b_t + 4c_t - 2d_t + e_t \end{aligned}$$

4 Gleichungen für 5 Unbekannte ergibt mit $a_t = t > 0$

$$\begin{aligned} b_t &= 0 \\ c_t &= -5t \\ d_t &= 0 \\ e_t &= 4t \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (5)

Berechne die Gleichung der Parabel 3. Grades, die in $H(-1 | \frac{32}{9})$ einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 1$ einen Wendepunkt besitzt. Außerdem soll ihr Schaubild die y-Achse bei $y = 3$ schneiden.

Lösung

Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow d = 3 \tag{1}$$

$$f(-1) = \frac{32}{9} \Leftrightarrow -a + b - c + d = \frac{32}{9} \tag{1}$$

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b + c = 0 \tag{1}$$

$$f''(1) = 0 \Leftrightarrow 6a + 2b = 0 \tag{1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 3 \tag{1}$$

Aufgabe 7 (5)

Eine Parabel 3. Ordnung hat den Wendepunkt $W(-1|0)$ und im Punkt $P(0|\frac{8}{3})$ eine Tangente mit der Steigung 2.

Bestimme die Gleichung der Parabel.

Lösung

4 Bedingungen für die Bestimmung von 4 Unbekannten a, b, c und d in

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ bzw.}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ bzw.}$$

$$f''(x) = 6ax + 2b:$$

$$(1) \text{ geht durch } W(-1|0) \Leftrightarrow f(-1) = 0 \Leftrightarrow -a + b - c + d = 0 \tag{1}$$

$$(2) W(-1|0) \text{ ist Wendepunkt} \Leftrightarrow f''(-1) = 0 \Leftrightarrow -6a + 2b = 0 \tag{1}$$

$$(3) \text{ geht durch } P(0|\frac{8}{3}) \Leftrightarrow f(0) = \frac{8}{3} \Leftrightarrow d = \frac{8}{3} \tag{1}$$

$$(4) \text{ Steigung in P ist 2} \Leftrightarrow f'(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2 \tag{1}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + \frac{8}{3} \tag{1}$$

Aufgabe 8 (5)

Eine Parabel 3. Ordnung hat den Wendepunkt $W(-1|0)$ und im Punkt $P(0|4)$ eine Tangente mit der Steigung 3. Bestimme die Gleichung der Parabel.

Lösung

$$(1) \text{ geht durch } W(-1|0) \Leftrightarrow f(-1) = 0 \Leftrightarrow -a + b - c + d = 0 \quad (1)$$

$$(2) W(-1|0) \text{ ist Wendepunkt} \Leftrightarrow f''(-1) = 0 \Leftrightarrow -6a + 2b = 0 \quad (1)$$

$$(3) \text{ geht durch } P(0|4) \Leftrightarrow f(0) = 4 \Leftrightarrow d = 4 \quad (1)$$

$$(4) \text{ Steigung in P ist 2} \Leftrightarrow f'(0) = 3 \Leftrightarrow c = 3 \quad (1)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + 4 \quad (1)$$

Aufgabe 9 (5)

Bestimme die Gleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades, deren Schaubild in $S(-1|0)$ die x-Achse berührt und in $W(0|1)$ einen Wendepunkt hat.

Lösung

$$f(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -a + b - c + d = 0 \quad (1)$$

$$f'(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3a - 2b + c = 0 \quad (1)$$

$$f(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad d = 1 \quad (1)$$

$$f''(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 1 \quad (1)$$

Aufgabe 10 (5)

Bestimme die Gleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades, deren Schaubild in $S(1|0)$ die x-Achse berührt und in $W(0|-1)$ einen Wendepunkt hat.

Lösung

$$f(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad +a + b + c + d = 0 \quad (1)$$

$$f'(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3a + 2b + c = 0 \quad (1)$$

$$f(0) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad d = -1 \quad (1)$$

$$f''(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x - 1 \quad (1)$$

Aufgabe 11 (6)

Bestimme die Gleichung einer ganzrationalen Funktion 4. Grades, deren Schaubild symmetrisch zur y-Achse ist und in $S(1|1)$ einen Wendepunkt besitzt. Die Wendenormale ist die 1. Winkelhalbierende.

Lösung

$$\text{Ansatz } f(x) = ax^4 + cx^2 + e \quad (1)$$

$$f(1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a + c + e = 1 \quad (1)$$

$$f'(1) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 4a + 2c = -1 \quad (1)$$

$$f''(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12a + 2c = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{13}{8} \quad (2)$$

Aufgabe 12 (6)

Bestimme die Gleichung einer ganzrationalen Funktion 4. Grades, deren Schaubild symmetrisch zur y-Achse ist und in $S(1|-1)$ einen Wendepunkt besitzt. Die Wendenormale ist die 2. Winkelhalbierende $y = -x$.

Lösung

$$\text{Ansatz } f(x) = ax^4 + cx^2 + e \quad (1)$$

$$f(1) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a + c + e = -1 \quad (1)$$

$$f'(1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4a + 2c = 1 \quad (1)$$

$$f''(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12a + 2c = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{13}{8} \quad (2)$$