5.3. Prüfungsaufgaben zum Newton-Verfahren

Aufgabe 1: Newton-Verfahren (6)
Beschreiben Sie das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung an dem Beispiel $f(x) = x^3 - x^2 - 3$ anhand einer Skizze. Berechnen Sie dazu x_0 sowie x_1 und geben Sie die vollständige Gleichung der ersten Tangente an.

Lösung

1. Schritt: VZW mit Hilfe der Wertetabelle suchen, z.B. $f(1) = -3$; $f(2) = 1 \Rightarrow x_0 = 1{,}5$ (1)

2. Schritt: Iterationsformel $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ solange anwenden, bis sich zwei aufeinander folgende Werte in den gewünschten Nachkommastellen nicht mehr unterscheiden. (2)

Skizze (1)

$f(\frac{3}{2}) = -\frac{15}{8}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x$ mit $f'(\frac{3}{2}) = \frac{15}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow t_1(x) = \frac{15}{4}x - \frac{15}{2}$ (2)

Aufgabe 2: Newton-Verfahren (6)
Beschreiben Sie das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung an dem Beispiel $f(x) = x^3 - x - 1$ anhand einer Skizze. Berechnen Sie dazu x_0 sowie x_1 und geben Sie die vollständige Gleichung der ersten Tangente an.

Lösung

1. Schritt: VZW mit Hilfe der Wertetabelle suchen, z.B. $f(1) = -1$; $f(2) = 5 \Rightarrow x_0 = 1{,}5$ (1)

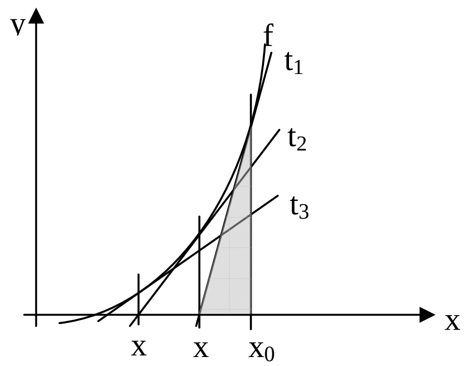
2. Schritt: Iterationsformel $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ solange anwenden, bis sich zwei aufeinander folgende Werte in den gewünschten Nachkommastellen nicht mehr unterscheiden. (2)

Skizze (1)

$f(\frac{3}{2}) = \frac{7}{8}$, $f'(x) = 3x^2 - 1$ mit $f'(\frac{3}{2}) = \frac{23}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} - \frac{7}{46} = \frac{31}{23}$ mit $t_1(x) = \frac{23}{4}x - \frac{31}{4}$ (2)

Aufgabe 3: Newton-Verfahren (5)
a) Beschreiben Sie das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung mit Hilfe einer Skizze.
b) Geben Sie die Näherungswerte an, die man erhält, wenn man die Nullstelle von $f(x) = x^3 - x - 1$ ausgehend vom Startwert $x_0 = 1{,}5$ auf 5 Nachkommastellen genau bestimmen will.

Lösung
a) Ausgehend von einem ersten Schätzwert x_0 erhält man immer bessere Näherungswerte, wenn man wiederholt mit Tangenten auf die x-Achse zielt, bis sich die Näherungswerte $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ in den gewünschten Nachkommastellen nicht mehr ändern:



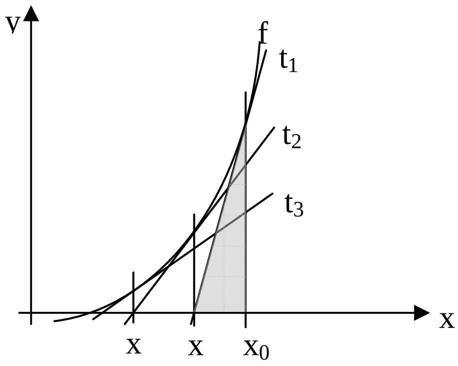
b)

Schritt n	Näherungswert x_n
0	1,5
1	1,34782
2	1,32520
3	1,32471
4	1,32471

Aufgabe 4: Newton-Verfahren (5)
a) Beschreiben Sie das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung mit Hilfe einer Skizze.
b) Geben Sie die Näherungswerte an, die man erhält, wenn man die Nullstelle von $f(x) = x^3 - x - 1$ ausgehend vom Startwert $x_0 = 1{,}5$ auf 5 Nachkommastellen genau bestimmen will.

Lösung

a) Ausgehend von einem ersten Schätzwert x_0 erhält man immer bessere Näherungswerte, wenn man wiederholt mit Tangenten auf die x-Achse zielt, bis sich die Näherungswerte $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ in den gewünschten Nachkommastellen nicht mehr ändern:



b)

Schritt n	Näherungswert x_n
0	1,5
1	1,99999
2	1,87499
3	1,86379
4	1,86370
5	1,86370