5.3. Prüfungsaufgaben zu ganzrationalen Funktionen mit Parametern

Aufgabe 1: Ortskurve (6)

Bestimme die Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte von $f_t(x) = \frac{t^2}{16}x^4 + \frac{t}{2}x^3$ für t > 0.

Lösung

Ableitungen: $f_t'(x) = \frac{t^2}{4}x^3 + \frac{3t}{2}x^2$ und $f_t''(x) = \frac{3t^2}{4}x^2 + 3tx = 3tx(\frac{t}{4}x + 1)$ (2)

⇒ Wendepunkte: ($f_t''(x) = 0$ mit VZW) W(0|0) (Sattelpunkt) und $W(-\frac{4}{t}|-\frac{16}{t^2})$ mit Ortskurve $y = -x^2$. (4)

Aufgabe 2: Ortskurve (6)

Bestimme die Gleichung der Ortskurve der Tiefpunkte von $f_t(x) = \frac{t^2}{16}x^4 + \frac{t}{2}x^3$ für t > 0.

Lösung

Ableitungen: $f_t'(x) = \frac{t^2}{4}x^3 + \frac{3t}{2}x^2 = \frac{3t}{2}x^2(\frac{t}{6}x + 1)$ und $f_t''(x) = \frac{3t^2}{4}x^2 + 3tx = 3tx(\frac{t}{4}x + 1)$ (2)

⇒ Tiefpunkte ($f_t'(x) = 0$ und $f_t''(x) > 0$) $T(-\frac{6}{t}|-\frac{27}{t^2})$ mit Ortskurve $y = -\frac{3}{4}x^2$. (4)

Aufgabe 3: Ortskurve (6)

Bestimme die Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte von $f_t(x) = \frac{t^2}{32}x^4 - \frac{t}{4}x^3$ für t > 0.

Lösung

Ableitungen: $f_t'(x) = \frac{t^2}{8}x^3 - \frac{3t}{4}x^2$, $f_t''(x) = \frac{3t^2}{8}x^2 - \frac{3}{2}tx$ und $f_t'''(x) = \frac{3t^2}{4}x - \frac{3}{2}t$ (2)

⇒ Wendepunkte ($f_t''(x) = 0$ mit VZW) S(0 | 0) (Sattelpunkt) $W(\frac{4}{t}|-\frac{8}{t^2})$ mit Ortskurve $y = -\frac{1}{2}x^2$. (4)

Aufgabe 4: Ortskurve (10)

Bestimmen Sie die Ortskurve der Wendepunkte und der Tiefpunkte von $f_t(x) = \frac{1}{t^3}(x^3 - 3tx^2 + 4t^3)$ für $t \in \mathbb{R}^+$.

Lösungen

Ableitungen: $f_t'(x) = \frac{3}{t^3}(x^2 - 2tx)$, $f_t''(x) = \frac{6}{t^3}(x - t)$ und $f_t'''(x) = \frac{6}{t^3}$ (2)

Extrempunkte ($f_t'(x) = 0$ mit VZW): H(0|0) und T(2t|0) (2)
Ortskurve der Tiefpunkte y = 0 (2)

Wendepunkte ($f''(x) = 0$ mit VZW): W(t|2) (2)
Ortskurve der Wendepunkte y = 2 (2)

Aufgabe 5: Ortskurve (10)

Bestimmen Sie die Ortskurve der Wendepunkte und der Tiefpunkte von ($f_t(x) = \frac{1}{t^3}(x^3 + 3tx^2 - 4t^3)$ für $t \in \mathbb{R}^+$.

Lösungen

Ableitungen: $f_t'(x) = \frac{3}{t^3}(x^2 + 2tx)$, $f_t''(x) = \frac{6}{t^3}(x + t)$ und $f_t'''(x) = \frac{6}{t^3}$ (2)

Extrempunkte ($f_t'(x) = 0$ mit VZW): H(0|0) und T(−2t|0) (2)
Ortskurve der Tiefpunkte y = 0 (2)

Wendepunkte ($f''(x) = 0$ mit VZW): W(−t|−2) (2)
Ortskurve der Wendepunkte y = −2 (2)

Aufgabe 6: Ortskurve (8)

Bestimme die Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte von $f_t = -\frac{x}{t}(x^2 - 4t^2)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}^+$

Lösung

Symmetrie: f_t ist ungerade $f_t(-x) = -f_t(x)$ (1)

Achsenschnittpunkte: $S_1(0|0)$, $S_{x2/3}(\pm 2t|0)$ (1)

Ableitungen: $f_t(x) = -\frac{1}{t}x^3 + 4tx$, $f'_t(x) = -\frac{3}{t}x^2 + 4t$, $f''_t(x) = -\frac{6}{t}x$, $f'''_t(x) = -\frac{6}{t}$ (2)

Extrempunkte ($f_t'(x) = 0$, $f_t'(x)$ </>0) $T(-\frac{2t}{\sqrt{3}} | -\frac{16t^2}{3\sqrt{3}})$ und $H(\frac{2t}{\sqrt{3}} | \frac{16t^2}{3\sqrt{3}})$ (2)

Wendepunkt: ($f''_t(x) = 0$ mit VZW) $W(0|0)$ (1)

Ortskurve der Hochpunkte $y = \frac{4}{\sqrt{3}}x^2$ (1)

Aufgabe 7: Ortskurve (8)

Bestimme die Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte von $f_t = -\frac{x^2}{t^2}(x - 2t)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}^+$

Lösung

Achsenschnittpunkte $S_1(0|0)$ (doppelt ⇒ Berührpunkt) und $S_2(2t|0)$ (1)

Ableitungen: $f_t(x) = -\frac{1}{t^2}x^3 + \frac{2}{t}x^2$, $f'_t(x) = -\frac{3}{t^2}x^2 + \frac{4}{t}x$, $f''_t(x) = -\frac{6}{t^2}x + \frac{4}{t}$, $f'''_t(x) = -\frac{6}{t^2}$ (2)

Extrempunkte ($f_t'(x) = 0$ mit VZW) $T(0|0)$ und $H(\frac{4}{3}t | \frac{32}{27}t)$ (2)

Wendepunkt: ($f_t''(x) = 0$ mit VZW) $W(\frac{2}{3}t | \frac{16}{27}t)$ (2)

Ortskurve der Hochpunkte $y = \frac{8}{9}x$ (1)

Aufgabe 9: Ortskurve (7)

Bestimme die Ortskurve der Tiefpunkte der Funktionenschar $f_t(x) = x^4 + tx^3$.

Lösung

$f_t'(x) = 4x^3 + 3tx^2$ und $f_t''(x) = 12x^2 + 6tx$ ⇒ Tiefpunkt $T(-\frac{3}{4}t | -\frac{27}{256}t^4)$ ⇒ Ortskurve $y = -\frac{1}{3}x^4$. (7)

Aufgabe 10: Ortskurve (7)

Bestimme die Ortskurve der Tiefpunkte der Funktionenschar $f_t(x) = tx^3 - x^2$.

Lösung

$f_t'(x) = 3tx^2 - 2x$ und $f_t''(x) = 6tx - 2$ ⇒ Tiefpunkt $T(\frac{2}{3t} | -\frac{4}{27t^2})$ ⇒ Ortskurve $y = -\frac{2}{3}x^2$. (7)

Aufgabe 11: Ortskurve (5)

Bestimme die Ortskurve der Hochpunkte der Funktionenschar $f_t(x) = -\frac{1}{t^2}x^3 + \frac{2}{t}x^2$ für $t > 0$

Lösung

Ableitungen: $f_t(x) = -\frac{1}{t^2}x^3 + \frac{2}{t}x^2$, $f'_t(x) = -\frac{3}{t^2}x^2 + \frac{4}{t}x$, $f''_t(x) = -\frac{6}{t^2}x + \frac{4}{t}$, $f'''_t(x) = -\frac{6}{t^2}$ (2)

Hochpunkt ($f_t'(x) = 0$, $f_t''(x) < 0$) $H(\frac{4}{3}t | \frac{32}{27}t)$ (2)

Ortskurve der Hochpunkte $y = \frac{8}{9}x$ (1)

Aufgabe 12: Ortskurve (5)

Bestimme die Ortskurve der Wendepunkte der Funktionenschar $f_t(x) = -\frac{1}{t^2}x^3 + \frac{2}{t}x^2$ für $t > 0$.

Lösung

Ableitungen: $f_t(x) = -\frac{1}{t^2}x^3 + \frac{2}{t}x^2$, $f'_t(x) = -\frac{3}{t^2}x^2 + \frac{4}{t}x$, $f''_t(x) = -\frac{6}{t^2}x + \frac{4}{t}$, $f'''_t(x) = -\frac{6}{t^2}$ (2)

Wendepunkt: ($f_t''(x) = 0$ mit VZW) $W(\frac{2}{3}t \mid \frac{16}{27}t)$ (2)

Ortskurve der Wendepunkte $y = \frac{8}{9}x$ (1)