

5.3. Kurvenuntersuchung ganzrationaler Funktionen

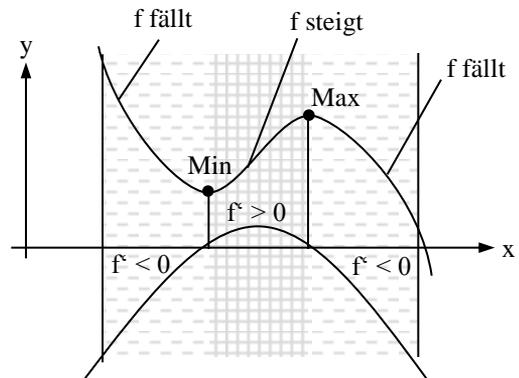
5.3.1. Monotonie und Krümmung einer Kurve

Satz: 1. Ableitung und Monotonie

Eine differenzierbare Funktion f ist streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$ auf $[a;b]$, wenn die 1. Ableitung $\begin{cases} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{cases}$ für alle $x \in [a;b]$ ist.

Satz: 1. Ableitung und lokale Extrema

f hat ein lokales $\begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases}$ im Punkt $(x_0|f(x_0))$, wenn die 1. Ableitung dort einen VZW von $\begin{cases} + \text{ zu } - \\ - \text{ zu } + \end{cases}$ hat.

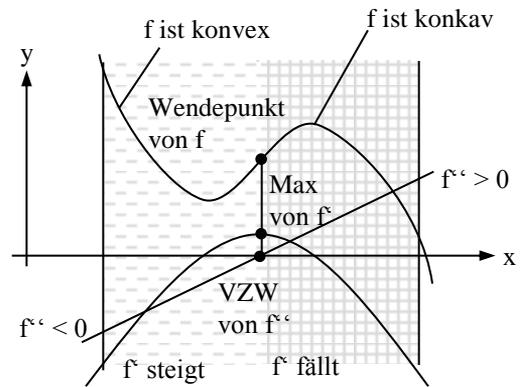


Definition: Krümmung einer Funktion

Eine differenzierbare Funktion f ist $\begin{cases} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{cases}$ auf $[a;b]$, wenn die 1. Ableitung f' auf $[a;b]$ streng monoton $\begin{cases} \text{steigt} \\ \text{fällt} \end{cases}$.

Satz: 2. Ableitung und Krümmung

Eine differenzierbare Funktion f ist $\begin{cases} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{cases}$ auf $[a;b]$, wenn die 2. Ableitung $f''(x)$ $\begin{cases} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{cases}$ für alle $x \in [a;b]$ ist.

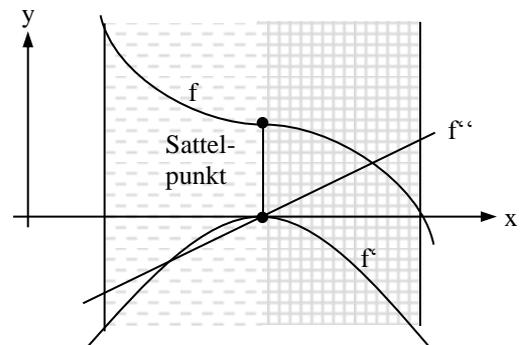


Satz: 2. Ableitung und Wendepunkte

f hat einen **Wendepunkt** $W(x_0|f(x_0))$, wenn an dieser Stelle
 die **1. Ableitung f'** ein **Extremum** bzw. gleichwertig
 die **2. Ableitung f''** einen **VZW** besitzt.

Sattelpunkte

Wendepunkte mit waagrechter Tangente nennt man **Sattelpunkte**.
 Sie treten auf, wenn das **Extremum der 1. Ableitung** die **x-Achse berührt**.



Beispiel: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 1 a):

$$\text{Beispiel } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x = \frac{1}{3} \cdot x \cdot (x+2) \cdot (x-2)$$

Symmetrie:

ungerade Funktion mit $f(-x) = -f(x)$
 \Rightarrow punktsymmetrisch zum Ursprung

Achsen Schnittpunkte:

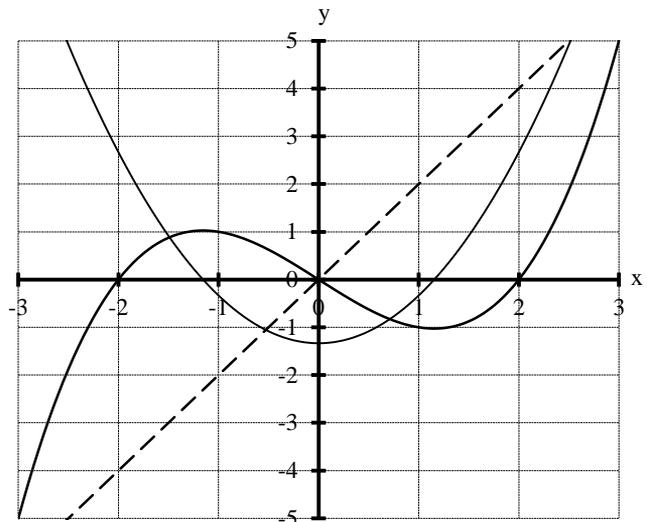
$N_1(-2|0), N_2(0|0), N_3(2|0)$

1. Ableitung

$$f'(x) = x^2 - \frac{4}{3} \text{ mit NST bei } x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$$

2. Ableitung

$$f''(x) = 2x \text{ mit NST bei } x_3 = 0$$



Extrempunkte:

$$f(-\sqrt{\frac{4}{3}}) = +\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{8}{9} \text{ (y-Wert)}, f'(-\sqrt{\frac{4}{3}}) = 0 \text{ (waagrechte Tangente)}, f''(-\sqrt{\frac{4}{3}}) = -2\sqrt{\frac{4}{3}} < 0 \text{ (f' steigt mit VZW von - nach +)}$$

$$\Rightarrow \text{Tiefpunkt } T(-\sqrt{\frac{4}{3}} | \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{8}{9}) \approx T(-1,15 | 1,03)$$

$$f(+\sqrt{\frac{4}{3}}) = -\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{8}{9} \text{ (y-Wert)}, f'(+\sqrt{\frac{4}{3}}) = 0 \text{ (waagrechte Tangente)}, f''(+\sqrt{\frac{4}{3}}) = +2\sqrt{\frac{4}{3}} > 0 \text{ (f' fällt mit VZW von + nach -)}$$

$$\Rightarrow \text{Hochpunkt } H(\sqrt{\frac{4}{3}} | -\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{8}{9}) \approx H(1,15 | -1,03)$$

Wendepunkte:

$$f(0) = 0 \text{ (y-Wert)}, f'(0) = 0 \text{ und } f''(0) = 2 > 0 \text{ (f' steigt mit VZW von - nach +)}$$

$$\Rightarrow \text{Wendepunkt } W(0|0)$$

Übung: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 1 b) – l)

5.3.2. Kurvenscharen und Ortskurven (siehe auch 4.2.8. und 4.2.9.)

Wiederholung Kurvenscharen: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 2 und 3

Beispiel Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 4 a)

Beispiel für die Bestimmung einer Ortskurve

Bestimme die Ortskurve der Tiefpunkte der Parabelschar $f_t(x) = x \cdot (x - t)$ mit $t \in \mathbb{R}$

Lösung

Mit $f_t'(x) = 2x - t = 0$ und $f_t''(x) = 2 > 0$) erhält man die Tiefpunkte $T_t \left(\frac{t}{2} \mid -\frac{t^2}{4} \right)$. Durch Einsetzen von $x = \frac{t}{2}$ bzw. $t = 2x$ in y

$$= -\frac{t^2}{4} \text{ erhält man } y = -\frac{(2x)^2}{4} = -x^2. \text{ Die Gleichung der Ortskurve der Tiefpunkte ist also } y = -x^2.$$

Übungen: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 4

5.3.3. Bestimmung von Funktionsgleichungen (siehe 4.2.10. und 4.5.7.)

Übungen: Aufgaben zur Bestimmung von Funktionsgleichungen

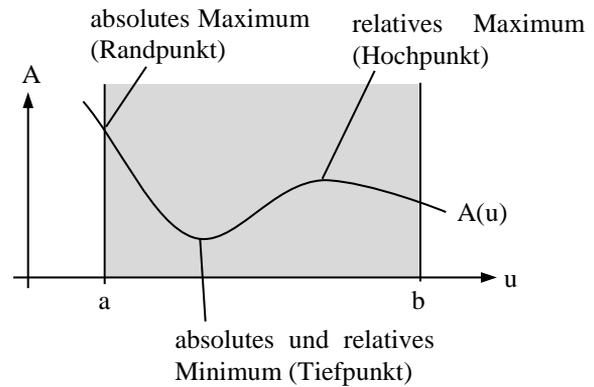
5.3.4. Extremwertaufgaben

Absolutes und relatives Maximum in einem Intervall

In Extremwertaufgaben wird meistens die Stelle $u \in [a;b]$ gesucht, an der eine (Flächen- oder Abstands-) Funktion $A(u)$ ihr **absolutes Maximum bezogen auf das Intervall $[a;b]$** annimmt.

Dazu sucht man zunächst nach **Hochpunkten** der Funktion $A(u)$.

Hochpunkte sind jedoch i. A. nur **relative Maxima**, d.h. sie sind Maxima nur in Bezug auf ihre nähere Umgebung, während am **Rande des Intervalls** durchaus noch höhere Punkte liegen können.



Konsequenz: zusätzlich müssen immer auch noch die Intervallgrenzen untersucht werden!

Beispiel: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 6a)

Beispiel Aufgabe 6 a)

Die Senkrechte $x = u$ sei für $0 \leq u \leq 1$ frei verschiebbar und schneidet die x-Achse im Punkt P und das Schaubild der Parabel $f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 2x - 15)$ im Punkt Q. Die Parabel schneidet die positive x-Achse im Punkt R. Für welches u wird der Flächeninhalt des Dreiecks PQR maximal?

Lösung:

Dreiecksfläche:
$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

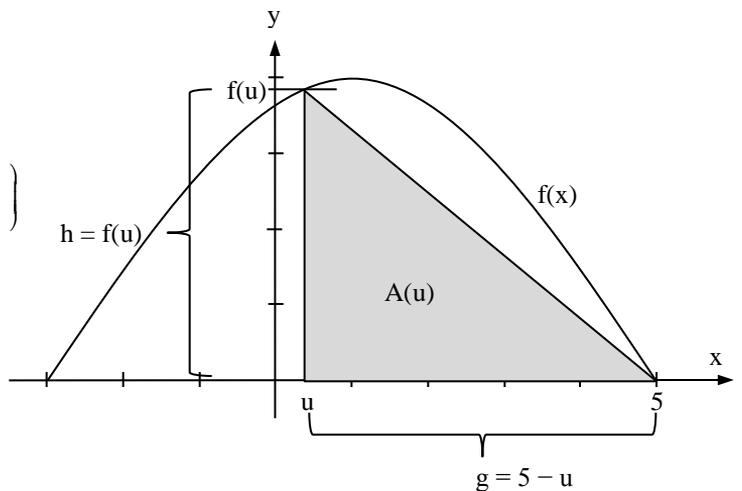
$$= \frac{1}{2} \cdot (5 - u) \cdot f(u)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (5 - u) \cdot \left(-\frac{1}{4} u^2 - 2u - 15 \right)$$

$$= \frac{1}{8} u^3 - \frac{7}{8} u^2 - \frac{5}{8} u + \frac{75}{8} .$$

Ableitungen:
$$A'(u) = \frac{3}{8} u^2 - \frac{7}{4} u - \frac{5}{8} \text{ und}$$

$$A''(u) = \frac{3}{4} u - \frac{7}{4}$$



Relatives Maximum

(Hochpunkt mit $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$)

an der Stelle $u_1 = -\frac{1}{3}$ mit $A(-\frac{1}{3}) \approx 10,1$

Relatives Minimum

(Tiefpunkt mit $A'(u) = 0$ und $A''(u) > 0$)

an der Stelle $u_2 = 5$ mit $A(5) = 0$

Schaubild von $A(u)$

Da kein relatives Maximum im Bereich $0 \leq u \leq 5$ vorhanden ist, kommen nur die **Bereichsgrenzen** als absolute Maxima in Frage.

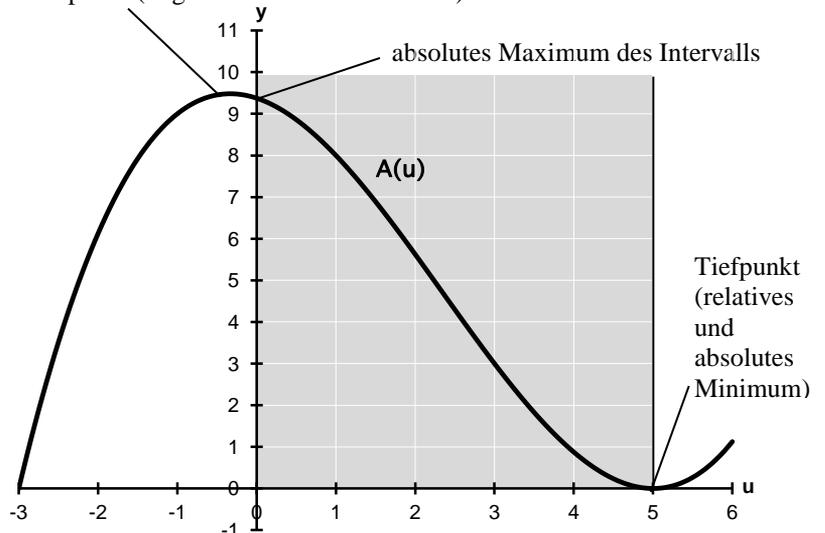
Durch Einsetzen dieser Grenzen in $A(u)$ erhält

man $A(0) = \frac{75}{8}$ und $A(5) = 0$

\Rightarrow absolutes Max bzw. maximale Fläche

für $u = 0$ mit $A(0) = \frac{75}{8}$.

Hochpunkt (liegt außerhalb des Intervalls)



Übungen: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 7 - 11

5.3.5. Nullstellenbestimmung mit dem Newton - Verfahren (siehe auch 7.5.)

Beispiel:

Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 + x + 1$ auf 2 Stellen nach dem Komma genau.

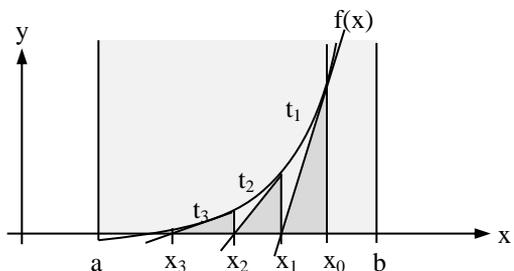
Lösung:

Mit Hilfe einer Wertetabelle wird der Bereich, in dem eine Nullstelle x_0 liegen muss, möglichst genau eingegrenzt:

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	-26	-7	-1	+1	+3	+11

- An dem Vorzeichenwechsel der Funktionswerte erkennt man, dass zwischen -1 und 0 eine Nullstelle x_0 liegen muss. Als erste Näherung für x_0 empfiehlt sich der in der Mitte zwischen -1 und 0 liegende Wert $x_1 = -0,5$.
- Um vom Startwert $x_1 = -0,5$ aus näher an x_0 heran zu gelangen, „zielt“ man mit der Tangente $t_1(x) = x \cdot f'(x_1) + [f(x_1) - x_1 \cdot f'(x_1)]$ durch den Punkt $P(x_1 | f(x_1))$ in Richtung x_0 . Die Nullstelle $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ dieser Tangente liegt bereits näher an x_0 .
- Nun „zielt“ man erneut mit Tangente $t_2(x) = x \cdot f'(x_2) + [f(x_2) - x_2 \cdot f'(x_2)]$ durch den Punkt $P(x_2 | f(x_2))$ in Richtung x_0 und erhält eine neue Nullstelle $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$, die wieder näher an x_0 liegt.
- Mit der Tangente t_3 durch den Punkt $P(x_3 | f(x_3))$ ergibt sich eine erneut verbesserte Näherung $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$.

Das Verfahren lässt sich beliebig oft wiederholen, so dass die Näherung beliebige Genauigkeiten erreicht:



Wertetabelle:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
1,0000	-0,5000	0,3750	1,7500
2,0000	-0,7143	-0,0787	2,5306
3,0000	-0,6832	-0,0020	2,4002
4,0000	-0,6823		

$\Rightarrow x_{02} = 0,68\dots$

Nullstellenbestimmung mit dem Newton-Verfahren

Die Funktion f sei im Intervall $[a; b]$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a; b]$. Die gesuchte Nullstelle x_0 liege im Intervall $[a; b]$ und $x_1 \in [a; b]$ sei ein beliebiger Startwert.

Dann erhält man mit der **Rekursionsformel** $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ für $n \geq 1$ eine Folge x_1, x_2, \dots , die gegen x_0

konvergiert: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Übung: Aufgaben zur Kurvendiskussion Nr. 12