5.4. Aufgaben zu Ableitungsregeln

Aufgabe 1: Verkettung von Funktionen
Gegeben ist f(x) = g(z(x)). Bestimmen Sie g(x) und z(x).

a) $f(x) = (2 + x)^5$ b) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ c) $f(x) = 2^{2x-1}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Aufgabe 2: Kettenregel
Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = (x^2 + 1)^3$
b) $f(x) = (2x^2 + 3x - 1)^3$
c) $f(x) = \sqrt{3x-1}$
d) $f(x) = \sqrt{2x^2+x-3}$
e) $f(x) = \frac{1}{x-1}$
f) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$
g) $f(x) = \frac{1}{-x^3+6x-4}$
h) $f(x) = \sin(x^2 - 3x)$
i) $f(x) = \cos(x^3 + 1)$

Aufgabe 3: Kettenregel bei Exponentialfunktionen
Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 10^{-x}$ c) $f(x) = e^{x^2-1}$ d) $f(x) = e^{3x-1}$ e) $f(x) = e^{-x^2}$

Aufgabe 4: Produktregel
Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x \cdot e^x$
b) $f(x) = (3x^2 + x - 2) \cdot e^x$
c) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$
d) $f(x) = (x^2 - 2) \cdot \sin(x)$
e) $f(x) = x^3 \cdot \cos(x)$
f) $f(x) = (x^3 - 2x + 1) \cdot \cos(x)$

Aufgabe 5: Kettenregel und Produktregel
Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$
b) $f(x) = (x^2 - 2) \cdot e^{-x}$
c) $f(x) = (x^2 - 2) \cdot e^{2x-1}$
d) $f(x) = x \cdot e^{x^2-1}$
e) $f(x) = (2x^2 + 3) \cdot 3^x$
f) $f(x) = x \cdot 2^{-x}$
g) $f(x) = (x^2 - 2) \cdot \sqrt{3x-1}$
h) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

Aufgabe 6: Kettenregel und Produktregel bei Logarithmusfunktionen
Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \ln(2x - 3)$
b) $f(x) = x \cdot \ln(x^2 + 3)$
c) $f(x) = (2x - 1) \cdot \ln(x + 1)$
d) $f(x) = (2x - 2) \cdot \ln(x)$
e) $f(x) = x \cdot \ln(x) - x$
f) $f(x) = \log_2(3x + 1)$

Aufgabe 7: Quotientenregel
Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x+3}$
b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$
c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$
d) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x+1}$
e) $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$
f) $f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2}$
g) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$
h) $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x-1}$
i) $f(x) = \frac{x^2}{-x^3+6x-4}$

Aufgaben 8: Tangenten und Normalen
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten t(x) und die Gleichung der Normalen n(x) am Schaubild von f im Punkt B:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ an B(1|?)
b) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ an B(4|?)
c) $f(x) = \sin(3x)$ an B($\frac{\pi}{3}$|?)
d) $f(x) = \ln(x + 1)$ an B(0|?)
e) $f(x) = (2x - 1) \cdot \ln(x)$ an B(e|?)
f) $f(x) = \frac{2x}{x+2}$ an B(2|?)

Aufgabe 9: Tangenten mit vorgegebener Steigung
Bestimmen Sie die Gleichungen aller Tangenten, die mit der Steigung m an das Schaubild von f gelegt werden können.

a) $f(x) = 2x^3 - 1$ mit m = 6
b) $f(x) = x\cdot\sqrt{x}$ mit m = 3
c) $f(x) = 4x + 3 + \frac{3}{x}$ mit m = 1
d) $f(x) = \sin(2x)$ mit m = 2 im Intervall $[0; \infty]$
e) $f(x) = e^{2x-1}$ mit m = 2e
f) $f(x) = \ln(2x - 1)$ mit m = 2

Aufgabe 10: Tangenten durch vorgegeben Punkte
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f durch den Punkt P

a) $f(x) = e^x$ durch $P(-1|-\ln(4))$
b) $f(x) = \frac{6}{x^2}$ durch $P(\frac{3}{2}|0)$
c) $f(x) = \ln(x)$ durch $P(-1|0)$
d) $f(x) = x\cdot e^x$ durch $P(\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}|-\frac{1}{e})$
e) $f(x) = \frac{3}{x^2+3}$ durch $P(0|\frac{9}{8})$
f) $f(x) = \sin(\pi x) + 1$ durch $P(\frac{1}{2}|1 + \frac{\pi}{2})$

Aufgabe 11: Tangenten und Normalen an vorgegebenen Punkten

a) Die Tangenten und die Normalen an den Punkten $P(-1|1)$ und $Q(1|1)$ des Schaubildes der Funktion $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$ begrenzen eine Viereck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.
b) Die Tangenten und die Normalen an den Wendepunkten des Schaubildes der Funktion $f(x) = 2\cdot\cos(\frac{x}{2}) - 1$ begrenzen eine Viereck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.
c) Ein Lichtstrahl mit der Gleichung x = 3 wird an einer polierten Flugzeugnase mit der Begrenzungslinie $y = 2\sqrt{x}$ reflektiert. An welcher Stelle trifft er die y-Achse? Hinweis: Bei einer Reflexion ist der Einfallswinkel des einfallenden Strahls mit der Tangente am Reflexionsort gleich dem Ausfallswinkel des reflektierten Strahls. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an.
d) Zwei Radiowellen mit den Gleichungen $y = 6\sqrt{3}$ und $y = 18\sqrt{3}$ treffen von rechts auf eine Satellitenschüssel mit der Gleichung $y = 6\sqrt{x}$. Der Empfänger sitzt an dem Punkt, in dem sich die reflektierten Strahlen treffen. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes.

Aufgabe 12: Kurvenscharen

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente am Schnittpunkt des Schaubildes von $f_t(x) = e - e^{tx}$ mit der x-Achse.
b) Durch den Punkt $P(3t - t^2|0)$ sollen Tangenten an die Schaubilder von $f_t(x) = -\frac{1}{x-t} + 1$ gelegt werden. Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Tangenten.
c) An welcher Stelle schneidet die Verbindungsgerade durch die beiden Wendepunkte des Schaubildes von $f_t(x) = (x^2 + 2 - t^2)e^x$ die y-Achse?
d) Die Tangenten durch die beiden äußeren Wendepunkte des Schaubildes von $f_t(x) = x\cdot e^{-tx^2}$ begrenzen ein Viereck. Geben Sie den Flächeninhalt dieses Viereckes an..

5.4. Lösungen zu den Aufgaben zu Ableitungsregeln

Aufgabe 1: Verkettung von Funktionen
klar

Aufgabe 2: Kettenregel

a) $f'(x) = 2x \cdot 3(x^2 + 1)^2$

b) $f'(x) = 3 \cdot (4x + 3) \cdot (2x^2 + 3x - 1)^2$

c) $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

d) $f'(x) = \dfrac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x-3}}$

e) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

f) $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$

g) $f'(x) = \dfrac{3x^2-6}{(-x^3+6x-4)^2}$

h) $f'(x) = (2x - 3) \cdot \cos(x^2 - 3x)$

i) $f'(x) = -3x^2 \cdot \sin(x^3 + 1)$

Aufgabe 3: Kettenregel bei Exponentialfunktionen

a) $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$ b) $f'(x) = -\ln(10) \cdot 10^{-x}$ c) $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2-1}$ d) $f'(x) = 3 \cdot e^{3x-1}$ e) $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

Aufgabe 4: Produktregel

a) $f'(x) = (1 + x) \cdot e^x$

b) $f'(x) = (3x^2 + 7x - 1) \cdot e^x$

c) $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

d) $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + (x^2 - 2) \cdot \cos(x)$

e) $f'(x) = 3x^2 \cdot \cos(x) - x^3 \cdot \sin(x)$

f) $f'(x) = (3x^2 - 2) \cdot \cos(x) - (x^3 - 2x + 1) \cdot \sin(x)$

Aufgabe 5: Kettenregel und Produktregel

a) $f'(x) = (1-x) \cdot e^{-x}$

b) $f'(x) = (-x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x}$

c) $f'(x) = (2x^2 + 2x - 4) \cdot e^{2x-1}$

d) $f'(x) = (2x^2 + 1) \cdot e^{x^2-1}$

e) $f'(x) = (2 \cdot \ln(3) \cdot x^2 + 4x + 3 \cdot \ln(3)) \cdot 3^x$

f) $f'(x) = (1 - x \cdot \ln(2)) \cdot 2^{-x}$

g) $f'(x) = \dfrac{15x^2-4x-6}{2\sqrt{3x-1}}$

h) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

Aufgabe 6: Kettenregel und Produktregel bei Logarithmusfunktionen

a) $f'(x) = \dfrac{2}{2x-3}$

b) $f'(x) = \ln(x^2 + 3) + \dfrac{2x^2}{x^2+3}$

c) $f'(x) = 2\ln(x + 1) + \dfrac{2x-1}{x+1}$

d) $f'(x) = 2(\ln(x) + 1 - \dfrac{1}{x})$

e) $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

f) $f'(x) = \dfrac{3}{(3x+1) \cdot \ln(2)}$

Aufgabe 7: Quotientenregel

a) $f'(x) = \dfrac{2x^2+6x-2}{(2x+3)^2}$

b) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

c) $f'(x) = -\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{2x^2+2x-2}{(2x+1)^2}$

e) $f'(x) = -\dfrac{3(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

f) $f'(x) = -\dfrac{2(x+1)}{(x-1)^3}$

g) $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

h) $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

i) $f'(x) = \dfrac{x^4+6x^2-8x}{(-x^3+6x-4)^2}$

Aufgabe 8: Tangenten und Normalen

a) $B(1|1)$ mit $t(x) = -2x + 3$ und $n(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

b) $B(4|3)$ mit $t(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$ und $n(x) = -3x + 15$

c) $B(\dfrac{\pi}{3}|0)$ mit $t(x) = 3x + \pi$ und $n(x) = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{\pi}{9}$

d) $B(0|0)$ mit $t(x) = x$ und $n(x) = -x$

e) $B(e|2e - 1)$ mit $t(x) = \dfrac{4e-1}{e}x - 2e$ und $n(x) = \dfrac{-e}{4e-1}x + \dfrac{e^2}{4e-1} + 2e - 1$

f) $B(2|1)$ mit $t(x) = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$ und $n(x) = -4x + 9$

Aufgabe 9: Tangenten mit vorgegebener Steigung

a) $t_1(x) = 6x + 3$ an $B_1(-1|-3)$ und
$t_2(x) = 6x - 5$ an $B_2(1|10)$

d) $t_1(x) = 2x$ an $B_1(0|0)$ und
$t_2(x) = 2x - 2\pi$ an $B_2(\pi|0)$

b) $t(x) = 3x - 4$ an $B(4|8)$

c) $t_1(x) = x - 3$ an $B_1(-1|-4)$ und $t_2(x) = x + 9$ an $B_2(1|10)$

e) $t(x) = 2ex - e$ an $B(1|e)$

f) $t(x) = 2x - 2$ an $B(1|0)$

Aufgabe 10: Tangenten durch vorgegeben Punkte

a) $t(x) = 2x + 2 - \ln(4)$ mit $B(\ln(2)|2)$

b) $t(x) = -12x + 18$ mit $B(1|6)$

c) $t(x) = x - 1$ mit $B(1|0)$

d) $t_1(x) = -\frac{1}{e}$ mit $B_1(-1|-\frac{1}{e})$ (TP!) und $t_2(x) = 2ex - e$ mit $B_2(1|e)$.

e) $t_{1/2}(x) = \pm\frac{3}{8}x + \frac{9}{8}$ mit $B_{1/2}(\pm1|\frac{3}{4})$ (Wendepunkte!)

f) $t_1(x) = \pi x + 1$ durch $B_1(0|1)$ und $t_2(x) = -\pi x + \pi + 1$ mit $B_2(1|1)$ (WP!)

Aufgabe 11: Tangenten und Normalen durch vorgegebene Punkte

a) Die Tangenten $t_{1/2}(x) = \pm x + 2$ schneiden sich in $S_t(0|2)$ und die Normalen $n_{1/2}(x) = \pm x$ in $S_n(0|0)$. Das Viereck PS_nQS_t hat zwei Diagonalen mit der Länge 2 LE. Es handelt sich also um ein Quadrat mit den Seitenlängen $\sqrt{2}$ LE und dem Flächeninhalt 2 FE.

b) Die Wendepunkte liegen in $W_{1/2}(\pm\frac{\pi}{2}|0)$. Die Tangenten $t_{1/2}(x) = \pm x + \frac{\pi}{2}$ schneiden sich in $S_t(0|\frac{\pi}{2})$ und die Normalen $n_{1/2}(x) = \pm x - \frac{\pi}{2}$ in $S_n(0|-\frac{\pi}{2})$. Das Viereck PS_nQS_n hat zwei Diagonalen mit der Länge π LE. Es handelt sich also um ein Quadrat mit den Seitenlängen $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ LE und dem Flächeninhalt $\frac{\pi^2}{2}$ FE.

c) Der Lichtstrahl trifft die Flugzeugnase an der Stelle $P(3|2\sqrt{3})$. Die Tangentensteigung ist dort $a = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\alpha$ mit dem Steigungswinkel $\alpha = \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 30°$. Der Einfallswinkel ist $90° - 30° = 60°$. Der Ausfallswinkel ist $30° - 60° = -30°$. Die Steigung des reflektierten Strahls ist also $a' = \tan(-30°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Seine Gleichung ist dann $s'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 5\sqrt{3}$. Er trifft die y-Achse also an der Stelle $S(0|5\sqrt{3})$.

d) Die Radiowellen treffen die Schüssel an den Stellen $P_1(3|6\sqrt{3})$ und $P_2(27|18\sqrt{3})$. Die Tangentensteigungen sind dort $a_1 = \sqrt{3} = \tan\alpha_1$ mit dem Steigungswinkel $\alpha_1 = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$ und $a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\alpha_2$ mit dem Steigungswinkel $\alpha_2 = \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 30°$. Die Einfallswinkel bzw. Ausfallwinkel sind 30° und 60°. Die Steigungswinkel der reflektierten Strahlen sind dann $\alpha_1' = -60°$ und $\alpha_2' = 60°$ (Skizze!). Die Steigungen der reflektierten Strahlen sind also $a_1' = \tan(-60°) = -\sqrt{3}$ und $a_2' = \tan(60°) = \sqrt{3}$. Ihre Gleichungen sind $s_1'(x) = -\sqrt{3}x + 9\sqrt{3}$ und $s_2'(x) = \sqrt{3}x - 9\sqrt{3}$. Sie treffen sich im Punkt $S(9|0)$. Dort muss der Empfänger sitzen

Aufgabe 12: Kurvenscharen

a) $f_t(x) = e - e^{tx}$ mit $f_t'(x) = -te^{tx}$ hat in $S(\frac{1}{t}|0)$ die Tangente $t(x) = -tx + 1$.

b) $f_t(x) = -\frac{1}{x-t} + 1$ mit $f_t'(x) = \frac{1}{(x-t)^2}$ hat die Tangenten $g_t(x) = \frac{x}{(2-t)^2} + \frac{t^2-3t}{(2-t)^2}$ durch $B_t(2|\frac{1-t}{2-t})$ und $h_t(x) = \frac{x}{t^2} + \frac{t-3}{t}$ durch $B_t(2t|\frac{t-1}{t})$

c) $f_t(x) = (x^2 + 2 - t^2)e^x$ mit $f_t'(x) = (x^2 - 2x + 2 - t^2)e^x$ und $f_t''(x) = (x^2 - t^2)e^x$ hat die Wendepunkte $W_{1t}(-t|\frac{2}{e^t})$ und $W_{2t}(t|2e^t)$ mit der Verbindungsgeraden $g_t(x) = \frac{1}{t}(e^t - e^{-t})x + e^t + e^{-t}$. mit $S_{ty}(0|e^t + e^{-t})$.

d) $f_t(x) = x\cdot e^{-tx^2}$ mit $f_t'(x) = (-2tx^2 + 1)\ e^{-tx^2}$ und $f_t''(x) = (4t^2x^3 - 6tx)\ e^{-tx^2}$ hat die Wendepunkte $W_{t0}(0|0)$ und $W_{t1/2}(\pm\sqrt{\frac{3}{2t}}\,|\,\sqrt{\frac{3}{2t}}\,e^{-1,5})$ mit den Wendetangenten $t_o(x) = x$ und $t_{1/2}(x) = -2e^{-1,5}x \pm \frac{1}{2}$. Das von ihnen eingeschlossene Viereck hat den Flächeninhalt $A = \sqrt{\frac{3}{2t}}$ FE.