5.4. Aufgaben zur Kurvenuntersuchung mit dem GTR

Aufgabe 1

a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1,5} - e^{-x^2}$ auf Symmetrie, Asymptoten, Extrempunkte und Wendepunkte.
b) Skizzieren Sie die Schaubilder von f und f' in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Aufgabe 2

a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{10}{x^2 + 1,5} - 10\,e^{-x^2}$ auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Asymptoten, Extrempunkte und Wendepunkte.
b) Skizzieren Sie die Schaubilder von f und f' in ein gemeinsames Koordinatensystem.
c) Geben Sie die gemeinsamen Punkte von f und f' an. Welche geometrische Bedeutung besitzen sie?

Aufgabe 3

a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \ln(x^2 + 1) + e^{-10x^2}$ auf Symmetrie, Extrempunkte und Wendepunkte.
b) Skizzieren Sie die Schaubilder von f und f' in ein gemeinsames Koordinatensystem.
c) Geben Sie die gemeinsamen Punkte von f und f' an. Welche geometrische Bedeutung besitzen sie?
d) Skizzieren Sie das Schaubild von $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ in das Koordinatensystem aus b) und zeigen Sie, dass g(x) für $x \to \pm\infty$ eine Näherungskurve von f ist. **Hinweis**: Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$

Aufgabe 4

a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{10}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ auf Symmetrie, hebbare Lücken, Asymptoten, Extrempunkte und Wendepunkte.
b) Skizzieren Sie die Schaubilder von f und f' in ein gemeinsames Koordinatensystem.
c) Zeigen Sie mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital, dass sowohl $\lim\limits_{x\to 0\pm} f(x) = 0$ als auch $\lim\limits_{x\to 0\pm} f'(x) = 0$. Welche geometrische Bedeutung haben diese beiden Ergebnisse?

Aufgabe 5

a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \ln x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ auf Definitionsbereich, Extrempunkte und Wendepunkte.
b) Skizzieren Sie die Schaubilder von f und f' in ein gemeinsames Koordinatensystem.
c) Geben Sie die gemeinsamen Punkte von f und f' an. Welche geometrische Bedeutung besitzen sie?
d) Zeigen Sie mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital, dass sowohl $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$ als auch $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = 0$. Welche geometrische Bedeutung haben diese beiden Ergebnisse?
e) Zeigen Sie, dass $g(x) = \ln x$ für $x \to \infty$ eine Näherungskurve von f ist. **Hinweis**: Zeigen Sie mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital, dass $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = 0$

5.4. Lösungen zu den Aufgaben zur Kurvenuntersuchung mit dem GTR

Allgemeine Vorgehensweise mit dem GTR:
Funktionseingabe ausgehend von Y= mit MATH

Beispiel: Eingabe der numerischen Ableitung Y_2 = nDERIV(Y_1, X, X) mit MATH ⇒ 8:nDERIV und VARS ⇒ Y-VARS ⇒ 1:Function ⇒ 1: Y_1

Funktionsuntersuchung ausgehend von GRAPH mit CALC

Aufgabe 1

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1,5} - e^{-x^2}$ und

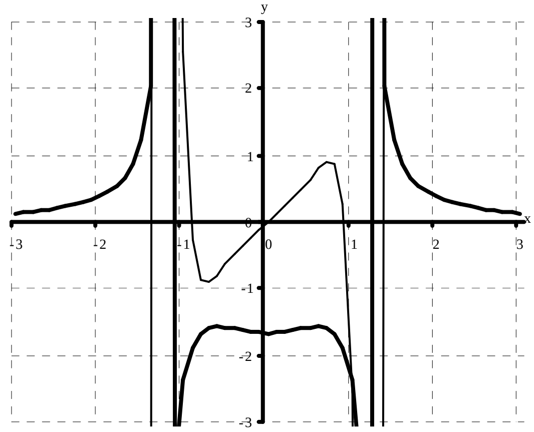
$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1,5)^2} + 2x\,e^{-x^2}$

$f(-x) = f(x)$ ⇒ Symmetrie zur y-Achse

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ ⇒ y = 0 ist Asymptote für $x \to \pm\infty$.

Einfache Nennernullstellen bei $x_{1/2} = \pm\sqrt{1,5}$ ⇒ senkrechte Asymptoten mit VZW an diesen Stellen. TP(0|−1,667), $HP_{1/2}$(±0,569|−1,57), $WP_{1/2}$(±0,337|−1,614)

b)



Aufgabe 2

a) $f(x) = \frac{10}{x^2 + 1,5} - 10\,e^{-x^2}$ und

$f'(x) = \frac{-20x}{(x^2 + 1,5)^2} + 20x\,e^{-x^2}$

$f(-x) = f(x)$ ⇒ Symmetrie zur y-Achse

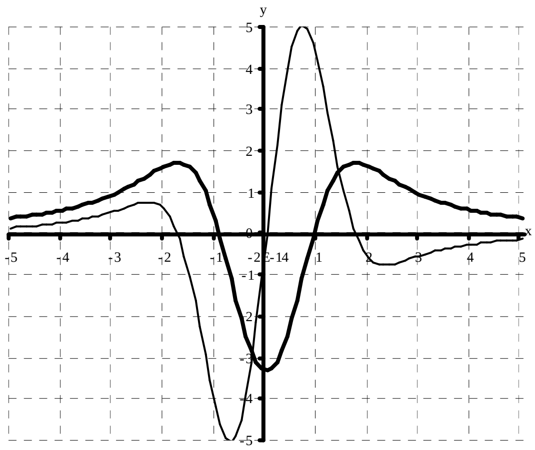
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ ⇒ y = 0 ist Asymptote für $x \to \pm\infty$.

Nullstellen $S_{x1/2}$ (±0,926|0)

TP (0|−3,333), $HP_{1/2}$ (±1,73|1,72)

$WP_{1/2}$ (±0,707|−1,06), $WP_{3/4}$ (±2,32|1,41)

b)



c) $S_{f \cap f'1}$ (−0,278|−2,91) (Y-Wert = Steigung)

$S_{f \cap f'2}$ (1,42|1,51) (Y-Wert = Steigung)

Aufgabe 3

a) $f(x) = \ln(x^2 + 1) + e^{-10x^2}$ und

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - 20\,x \cdot e^{-10x^2}$

$f(-x) = f(x)$ ⇒ Symmetrie zur y-Achse

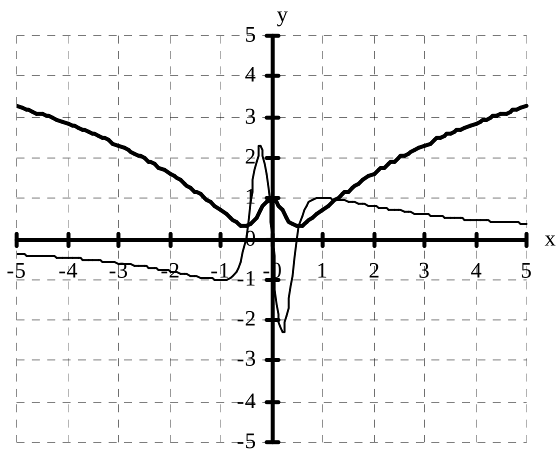
HP(0|1)

$TP_{1/2}$ (±0,503|0,305)

WP_1 (±0,208|0,691)

WP_2 (±1,01|0,707)

b)



c) $S_{f \cap f'1}$ (−0,464|0,311) (Y-Wert = Steigung)

$S_{f \cap f'2}$ (−0,056|0,972) (Y-Wert = Steigung)

$S_{f \cap f'3}$ (0,550|0,313) (Y-Wert = Steigung)

$S_{f \cap f'4}$ (1,280|0,970) (Y-Wert = Steigung)

d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-10x^2} = 0.$

Aufgabe 4

a) $f(x) = \frac{10}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ und

$f'(x) = [-\frac{10}{x^2} + \frac{20}{x^4}] \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \Rightarrow$ hebbare Lücke H(0|0)

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$.

$S_{x1/2}$ (±0,926|0)

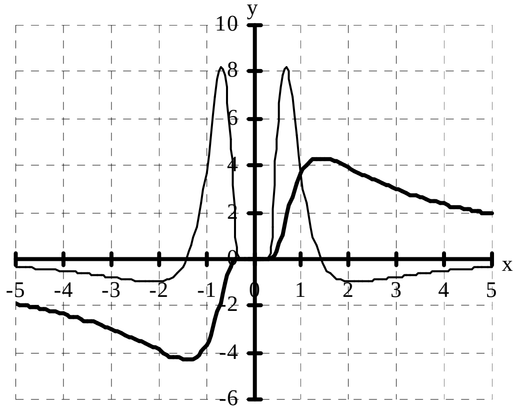
TP (−1,41|−4,29)

HP (+1,41|+4,29)

$WP_{1/2}$ (±2,14|±3,75)

$WP_{3/4}$ (±0,662|±1,54)

b)



c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{10}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{10}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$ und

$$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{10}{x^2}+\frac{20}{x^4}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{20}{x^3}-\frac{80}{x^5}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-1+\frac{40}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{80}{x^3}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{40}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$$

Sowohl die y-Werte als auch die Steigung streben gegen Null

Aufgabe 5

a) $f(x) = \ln x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ und

$f'(x) = [\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}] \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

$D = \mathbb{R}^+$

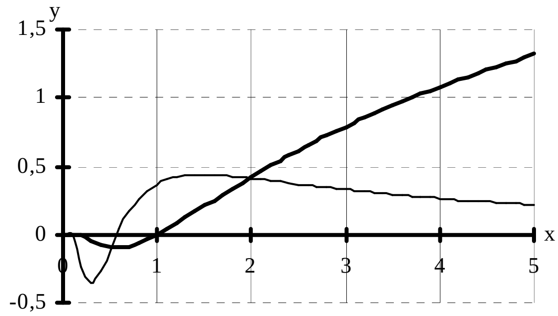
$S_x(1|0)$

TP (0,563|−0,972)

WP_1 (0,294|−0,041)

WP_2 (1,48|1,97)

b)



c) $S_{f\&f'1}$ (0,506|−0,944)

$S_{f\&f'2}$ (1,975|0,41) (Y-Wert = Steigung)

d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}} =$

$$\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}+\frac{1-2\ln x}{x^3}}{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{1-2\ln x}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{-3+2\ln x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-3+2\ln x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}} =$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{-2x}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$. Sowohl die y-Werte als auch die Steigung streben gegen Null!

e) $$\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x \cdot (e^{-\frac{1}{x}} - 1) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x(\ln x)^2}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

$= 0 \cdot 1 = 0$.