5.4. Aufgaben zur Kurvenuntersuchung zusammengesetzter Funktionen

Aufgabe 1: Kurvendiskussion von Exponentialfunktionen
Untersuche das Schaubild der Funktion f auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Extrem- und Wendepunkte. Skizziere das Schaubild im wesentlichen Bereich.

a) $f(x) = x\cdot e^x$

b) $f(x) = x^2\cdot e^{-x}$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

d) $f(x) = x + e^{-\frac{x}{e}}$

e) $f(x) = -\frac{e}{2}x^2 + e^x$

f) $f(x) = \frac{1}{e}x - e^{x-2}$

g) $f(x) = \frac{2}{e}x + e^{-x^2}$

h) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

i) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + e^{-x}}$

Aufgabe 2: Kurvendiskussion von Exponentialfunktionen mit Parameter
Untersuche das Schaubild der Funktion f_t in Abhängigkeit von $t > 0$ auf Achsenschnittpunkte, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Extrem- und Wendepunkte und skizziere ihren Verlauf für $t \in \{-2; 0; 2\}$.
Beschreibe in Worten, wie sich das Schaubild mit wachsenden $t > 0$ ändert.
Beschreibe das Wachstumsverhalten der Schaubilder für $x \to \infty$: Handelt es sich um lineares, exponentielles, beschränktes oder logistisches Wachstum?

a) $f_t(x) = \frac{x}{t}\cdot e^{-tx}$

b) $f_t(x) = e^{-(x-t)^2}$

c) $f_t(x) = \frac{e}{t}x - e^{\frac{x}{t}}$

d) $f_t(x) = e^{\frac{t\cdot x}{e}} - t\cdot x$

e) $f_t(x) = 100 - 100e^{-tx}$

f) $f_t(x) = \dfrac{100}{1+100\cdot e^{-tx}}$

Aufgabe 3: Kurvendiskussion von Logarithmusfunktionen
Untersuche das Schaubild der Funktion f auf Achsenschnittpunkte, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Extrem- und Wendepunkte. Skizziere das Schaubild im wesentlichen Bereich.

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

b) $f(x) = (\ln x)^2$

c) $f(x) = (\ln x)^3$

Aufgabe 4: Kurvendiskussion von rationalen Funktionen
Untersuche das Schaubild der Funktion f auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Extrem- und Wendepunkte. Skizziere das Schaubild im wesentlichen Bereich.

a) $f(x) = \dfrac{4x}{1-x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-7x+11}{x-5}$

Aufgabe 5: Kurvendiskussion von rationalen Funktionen mit Parameter
Untersuche die folgenden Funktionen in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Extrem- und Wendepunkte und skizziere ihren Verlauf für $t \in \{-2; 0; 2\}$. Gib außerdem die Ortskurven der Extrem- und Wendepunkte an.

a) $f_t(x) = x + \dfrac{4t^3}{(x-t)^2}$

b) $f_t(x) = x + t + \dfrac{1}{x-t}$

c) $f_t(x) = \dfrac{x-t}{x^2}$

d) $f_t(x) = \dfrac{x}{(x-t)^2}$

e) $f_t(x) = \dfrac{x+t}{(x-t)^2}$

f) $f_t(x) = x + 3t + \dfrac{4t^2}{x-t}$

Aufgabe 6: Vermischte Aufgaben zu Funktionenscharen

a) Gegeben sind die Funktionen $f_t(x) = tx^2 \cdot e^{-\frac{x}{t}}$ für $t > 0$. Berechnen Sie die Ortskurve der Hochpunkte. Geben Sie die Gleichung der Parabel an, die jeweils durch beide Extrempunkte verläuft und außerdem symmetrisch zur y-Achse ist.

b) Berechnen Sie die Ortskurve der Hochpunkte und der Wendepunkte von $f_t(x) = \frac{x}{t} \cdot e^{-tx}$ für $t > 0$.

c) Berechnen Sie die Schnittpunkte und die Schnittwinkel der Funktionen $f_t(x) = e^{tx}$ und $g_t(x) = e^{-\frac{x}{t}}$ für $t > 0$.

d) Berechnen Sie die Fläche, die die Wendetangente von $f_t(x) = \frac{x}{t} \cdot e^{-tx}$ für $t > 0$ mit den Koordinatenachsen einschließt.

e) Zeigen Sie, dass die Fläche, die die Wendetangente von $f_t(x) = (t^2x + t) \cdot e^{-tx}$ für $t > 0$ mit den Koordinatenachsen einschließt, unabhängig von t ist.

f) Für welche Werte von t berührt das Schaubild von $f_t(x) = x + e^{t-x}$ die x-Achse ?

g) Für welche Werte von t hat das Schaubild von $f_t(x) = e^{tx} + k \cdot e^{(t+1)x}$ einen Wendepunkt ? Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.

h) Zeigen Sie, dass die Schaubilder der Funktionen $f_t(x) = e^{tx}$ für $t > 0$ alle durch einen gemeinsamen Punkt P gehen. Die Tangenten und die Normalen durch P begrenzen mit der x-Achse ein Dreieck. Für welchen Wert von t wird der Flächeninhalt dieses Dreieckes minimal ?

i) Für welches t hat der Schnittpunkt von $f_t(x) = \frac{x + 2 + \ln(x + t)}{x + t}$ mit der Geraden $y = 1$ den kleinsten Abstand von der x-Achse?

Aufgabe 7: Extremwertaufgaben mit Exponentialfunktionen

a) Welches Rechteck zwischen der x-Achse und dem Schaubild von $f(x) = e^{-x^2}$ hat den größten Inhalt?

b) Welches Rechteck im 1. Quadranten unter dem Schaubild von $f(x) = e^{-x}$ hat den größten Inhalt?

c) Welches Rechteck im 1. Quadranten unter dem Schaubild von $f(x) = 2x^2 \cdot e^x$ hat den größten Inhalt?

Aufgabe 8: Tangenten und Normalen an Exponentialfunktionen

a) Die Tangente und die Normale am Schaubild von $f_t(x) = e^{tx}$ mit $t > 0$ im Punkt $P(0|1)$ begrenzen mit der x-Achse ein Dreieck. Für welches t wird sein Flächeninhalt minimal und wie groß ist dieser?

b) Untersuchen Sie das Schaubild von $f_t(x) = tx \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2-3)}$ mit $t \in \mathbb{R}^+$ auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte. Die Tangente an das Schaubild von f_t im Punkte $A(\sqrt{3}\,|\,t\sqrt{3})$ bildet zusammen mit der x-Achse und der Geraden $g_t(x) = \frac{1}{2t^2} \cdot x$ ein Dreieck. Für welches t ist der Inhalt dieses Dreieckes am größten? Berechnen Sie den größten Flächeninhalt

Aufgabe 9: Extremwertaufgaben mit rationale Funktionen

a) Welches Rechteck mit dem Inhalt $A = 36\ cm^2$ hat den kleinsten Umfang?

b) Welcher Kreisauschnitt mit dem Inhalt $A = 100\ cm^2$ hat den kleinsten Umfang?

c) Welcher Punkt auf dem Schaubild von $f(x) = \frac{2}{x^2}$ hat den kleinsten Abstand zum Ursprung? **Hinweis**: Da die Wurzelfunktion monoton steigt, ist $\sqrt{A}$ genau dann minimal, wenn A minimal ist.

d) Welches Rechteck zwischen der x-Achse und dem Schaubild von $f(x) = \frac{20}{x^2 + 5}$ hat den größten Inhalt?

e) Der Querschnitt eines unterirdischen Entwässerungskanals ist ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis und soll eine Fläche von $8\ m^2$ haben. Berechnen Sie seine Abmessungen so, dass der Materialverbrauch für die Ausmauerung minimal wird.

f) Berechnen Sie die Abmessungen einer Konservendose aus Weißblech, die bei minimalem Materialverbrauch einen Inhalt von einem Liter haben soll.

g) Ein Metallgefäß hat die Form eines Zylinders mit aufgesetzter Halbkugel und soll einen Inhalt von einem Liter haben. Berechnen Sie seine Abmessungen so, dass der Materialverbrauch minimal wird.

h) Ein Blechkasten soll die Form eines Quaders mit quadratischer Grundfläche haben und einen Inhalt von einem Liter fassen. Berechnen Sie seine Abmessungen so, dass der Materialverbrauch minimal wird.

5.4. Lösungen zu den Aufgaben zur Kurvenuntersuchung zusammengesetzter Funktionen

Aufgabe 1: Kurvendiskussion von Exponentialfunktionen

a) $f(x) = x\cdot e^x$: keine Symmetrie, da $f(-x) \neq \pm f(x)$, Achsenschnittpunkt S(0|0), Asymptote y = 0, da $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$. $f'(x) = (1 + x)\cdot e^x$, $f''(x) = (2 + x)\cdot e^x$ und $f'''(x) = (3 + x)\cdot e^x \Rightarrow T(-1|-\frac{1}{e}) \approx T(-1|-0{,}368)$ und $W(-2|-\frac{2}{e^2}) \approx W(-2|-0{,}271)$

b) $f(x) = x^2\cdot e^{-x}$: keine Symmetrie, da $f(-x) \neq \pm f(x)$, Achsenschnittpunkte: S(0|0) doppelt $\Rightarrow$ Berührpunkt und Minimum, da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; Asymptote y = 0, da $f(x) \to$ für $x \to +\infty$. $f'(x) = (-x^2 + 2x)\cdot e^{-x}$, $f''(x) = (x^2 - 4x + 2)\cdot e^{-x}$ und $f'''(x) = (-x^2 + 6x - 6)\cdot e^x \Rightarrow T(0|0)$ und $H(2|\frac{4}{e^2}) \approx H(2|0{,}54)$ und $W_1(2-\sqrt{2}\ |f(2-\sqrt{2})) \approx W_1(0{,}59|0{,}19)$ und $W_2(2+\sqrt{2}\ |f(2+\sqrt{2}))\approx W_1(3{,}41|0{,}38)$

c) $f(x) = e^{-x^2}$: Symmetrie zur y-Achse, da $f(-x) = f(x)$, Achsenschnittpunkte $S_y(0|1)$, Asymptote y = 0, da $f(x) \to$ für $x \to +\infty$. $f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$ und $f''(x) = (4x^2 - 2)\ e^{-x^2} \Rightarrow H(0|1)$ und $W_{1/2}(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\ |\ \frac{1}{\sqrt{e}})$

d) $f(x) = x + e^{-\frac{x}{e}}$: keine Symmetrie, da $f(-x) \neq \pm f(x)$, Achsenschnittpunkte: $S_y(0|1)$ und $S_x(-e|0)$, Asymptote g(x) = x für $x \to +\infty$, da $f(x) - g(x) = e^{-\frac{x}{e}} \to 0$ für $x \to +\infty$. $f'(x) = 1 - \frac{1}{e}\cdot e^{-\frac{x}{e}} = 1 - e^{-\frac{x}{e}-1}$ und $f''(x) = \frac{1}{e^2}\cdot e^{-\frac{x}{e}} = e^{-\frac{x}{e}-2} \Rightarrow T(-e|0)$

e) $f(x) =-\frac{e}{2}x^2 + e^x$: keine Symmetrie, da $f(-x) \neq \pm f(x)$, Achsenschnittpunkte: $S_y(0|1)$ und $S_x(-0{,}627|0)$, Näherungskurve $g(x) = -\frac{e}{2}x^2$ für $x \to -\infty$, da $f(x) - g(x) = e^x \to 0$ für $x \to -\infty$. $f'(x) = -ex + e^x$, $f''(x) = -e + e^x$ und $f'''(x) = e^x \Rightarrow S(1|\frac{e}{2}) \approx S(1|1{,}36)$

f) $f(x) = \frac{1}{e}x - e^{x-2}$: keine Symmetrie, da $f(-x) \neq \pm f(x)$, Achsenschnittpunkte: $S_y(0|-\frac{1}{e^2})$ und $S_x(1|0)$, Asymptote: $g(x) = \frac{1}{e}x$ für $x \to -\infty$, da $f(x) - g(x) = e^{x-2} \to 0$ für $x \to -\infty$. $f'(x) = \frac{1}{e} - e^{x-2}$, $f''(x) = -e^{x-2}$ und $f'''(x) = -e^x - 2 \Rightarrow H(1|0)$

g) $f(x) = \frac{2}{e}x + e^{-x^2}$: keine Symmetrie, da $f(-x) \neq \pm f(x)$, Achsenschnittpunkte: $S_y(0|1)$ und $S_x(-0{,}761|0)$, Asymptote: $g(x) = \frac{2}{e}x$ für $x \to \pm\infty$, da $f(x) - g(x) = e^{-x^2} \to 0$ für $x \to \pm\infty$. $f'(x) = \frac{2}{e} - 2x\,e^{-x^2}$ und $f''(x) = (4x^2 - 2)\ e^{-x^2} \Rightarrow H(1|\frac{3}{e})$ und $W_{1/2}(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\ |\pm\frac{1}{\sqrt{2}\cdot e} + \frac{1}{\sqrt{e}})$

h) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$: Symmetrie zur y-Achse, da f(−x) = f(x)) und f(x) > 0 für alle $x \in \mathbb{R}$, Achsenschnittpunkte: $S_y(0|1)$, keine Asymptoten. $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ und $f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = f(x) \Rightarrow T(0|1)$

i) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$: keine Symmetrie, da $f(-x) \neq \pm f(x)$, Achsenschnittpunkte $S_y(0|\frac{1}{2})$, Asymptoten: $g_1(x) = 0$ für $x \to -\infty$: und $g_2(x) = 1$ für $x \to +\infty$. $f'(x) = \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2}$ und $f''(x) = \frac{-4(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3} \Rightarrow W(0|\frac{1}{2})$

Aufgabe 2: Kurvendiskussion von Exponentialfunktionen mit Parameter

a) $f_t(x) = \frac{x}{t} \cdot e^{-tx}$: Achsenschnittpunkt S(0|0), Asymptote y = 0, da f(x) → 0 für x → + ∞. $f_t'(x) = (\frac{1}{t} - x)e^{-tx}$ und $f_t''(x) = (tx - 2) \cdot e^{-tx}$ ⇒ $H(\frac{1}{t} | \frac{1}{et^2})$ und $W(\frac{2}{t} | \frac{1}{e^2 t^2})$. Exponentielle Abnahme, die mit steigendem Wachstumsfaktor t immer schneller verläuft

b) $f_t(x) = e^{-(x-t)^2}$: Achsenschnittpunkt $S(0| e^{-t^2})$, Asymptote y = 0, da f(x) → 0 für x → ± ∞. $f_t'(x) = -2(x - t)\ e^{-(x-t)^2}$ und $f_t''(x) = -2(1 - 2(x - t)^2)\ e^{-(x-t)^2}$ ⇒ H(t|1) und $W_{1/2}(t \pm \frac{1}{\sqrt{2}} | \frac{1}{\sqrt{e}})$. Exponentielle Abnahme, die mit steigendem Verschiebungsparameter t immer später einsetzt

c) $f_t(x) = \frac{e}{t} x - e^{\frac{x}{t}}$: Achsenschnittpunkte $S_x(t|0)$ und $S_y(0|-1)$, Asymptote $g_t(x) = \frac{e}{t} x$ für x → − ∞, da $f_t(x) - g_t(x) = e^{\frac{x}{t}} \to 0$ für x → − ∞. $f_t'(x) = \frac{e}{t} - \frac{1}{t} e^{\frac{x}{t}}$ und $f_t''(x) = -\frac{1}{t^2} e^{\frac{x}{t}}$ ⇒ H(t|0). Exponentielles Wachstum, das mit steigendem t immer langsamer verläuft.

d) $f_t(x) = e^{\frac{t \cdot x}{e}} - t \cdot x$: Achsenschnittpunkte $S_x(\frac{e}{t}|0)$ und $S_y(0|1)$, Asymptote $g_t(x) = tx$ für x → − ∞, da $f_t(x) - g_t(x) = e^{\frac{tx}{e}} \to 0$ für x → − ∞. $f_t'(x) = \frac{t}{e} e^{\frac{tx}{e}} - t$ und $f_t''(x) = \left(\frac{t}{e}\right)^2 e^{\frac{tx}{e}}$ ⇒ $H(\frac{e}{t}|0)$. Exponentielles Wachstum für x → + ∞, das mit steigendem Wachstumsfaktor t immer schneller verläuft.

e) $f_t(x) = 100 - 100e^{-tx}$: Achsenschnittpunkt S(0|0), Asymptote g(x) = 100 für x → + ∞, da $f_t(x) - g(x) = 100e^{-tx} \to 0$ für x → + ∞. $f_t'(x) = 100te^{-tx}$ und $f_t''(x) = -100t^2e^{-tx}$. Beschränktes Wachstum mit Schranke S = 100, das mit steigendem Wachstumsfaktor t immer schneller verläuft.

f) $f_t(x) = \frac{100}{1+100 \cdot e^{-tx}}$: Achsenschnittpunkt $S_y(0|\frac{100}{101})$, Asymptoten: $g_1(x) = 0$ für x → − ∞, da $f_t(x) \to 0$ für x → − ∞ und $g_2(x) = 100$ für x → + ∞, da $f_t(x) \to 100$ für x → + ∞. $f_t'(x) = \frac{10000 \cdot t \cdot e^{-tx}}{(1+100 \cdot e^{-tx})^2}$ und $f_t''(x) = \frac{10000 \cdot t^2 \cdot e^{-tx}(100 \cdot e^{-tx} - 1)}{(1+100 \cdot e^{-tx})^3}$ ⇒ $W(\frac{\ln 100}{t}|50)$. Logistisches Wachstum mit Schranke S = 100, das mit steigendem Wachstumsfaktor t immer schneller verläuft.

Aufgabe 3: Kurvendiskussion von Logarithmusfunktionen

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$**:** Achsenschnittpunkt: $S_x(1|0)$**,** Asymptoten**:** negative y-Achse, da f(x) → − ∞ für $x \to 0^+$ und positive x-Achse, da f(x) → 0 für x → + ∞**.** $f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$ und $f''(x) = \frac{1}{x^3}(2\ln x - 3)$ **⇒** $H(e|\frac{1}{e})$ und $W(e^{1,5}|\frac{1,5}{e^{1,5}}) \approx W(4,48|0,33)$

b) $f(x) = (\ln x)^2$: Achsenschnittpunkt: $S_x(1|0)$ (doppelt), Asymptote: positive y-Achse, da f(x) → + ∞ für $x \to 0^+$. $f'(x) = \frac{2\ln x}{x}$ und $f''(x) = \frac{2}{x^2}(1 - \ln x)$ ⇒ T(1|0) und W(e|1)

c) $f(x) = (\ln x)^3$: Achsenschnittpunkt: $S_x(1|0)$ (dreifach), Asymptote: negative y-Achse, da f(x) → − ∞ für $x \to 0^+$. $f'(x) = \frac{3(\ln x)^2}{x}$, $f''(x) = \frac{3}{x^2} \cdot \ln x \cdot (2 - \ln x)$ ⇒ W(1|0) (Sattelpunkt) und $W(e^2|8)$

Aufgabe 4: Kurvendiskussion von rationalen Funktionen

a) $f(x) = \frac{4x}{1-x^2} = \frac{4x}{(x-1)(x+1)}$: D = $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, Punktsymmetrie am Ursprung, da $f(-x) = -f(x)$, Achsenschnittpunkt: S(0|0), senkrechte Asymptoten bei $x = \pm 1$, da NST nur im Nenner, waagrechte Asymptote $y = 0$ für $x \to \pm\infty$, da Nennergrad > Zählergrad. $f'(x) = \frac{4(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ und $f''(x) = \frac{8x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}$ $\Rightarrow$ W(0|0)

b) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{4x}{(x-1)^2}$: D = $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, keine Symmetrie, da $f(-x) \neq \pm f(x)$, Achsenschnittpunkte $S_y(0|1)$ und $S_x(-1|0)$, senkrechte Asymptote ohne VZW bei x = 1, da zweifache NST nur im Nenner, waagrechte Asymptote y = 1 für $x \to \pm\infty$, da $f(x) \to 1$ für $x \to \pm\infty$. $f'(x) = -\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$ und $f''(x) = \frac{8(x+2)}{(x-1)^4}$ $\Rightarrow$ T(−1|0) und W($-2|\frac{1}{9}$)

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$: D = $\mathbb{R}$, Symmetrie zur y-Achse, da $f(-x) = f(x)$, Achsenschnittpunkte $S_y(0|-1)$ und $S_{x1/2}(\pm 1|0)$, waagrechte Asymptote y = 1 für $x \to \pm\infty$, da $f(x) \to 1$ für $x \to \pm\infty$. $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$ und $f''(x) = \frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}$

$\Rightarrow$ T(0|−1) und $W_{1/2}(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}|-\frac{1}{2})$.

d) $f(x) = \frac{x^2-7x+11}{x-5} = x - 2 + \frac{1}{x-5}$, D = $\mathbb{R}\setminus\{5\}$, keine Symmetrie, Achsenschnittpunkte: $S_y(0|-\frac{11}{5})$ und $S_{x1/2}(\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}|0)$, senkrechte Asymptote bei x = 5, da NST nur im Nenner, schiefe Asymptote g(x) = x − 2 für $x \to \pm\infty$, da $f(x) - g(x) = \frac{2}{x^2+1} \to 0$ für $x \to \pm\infty$. $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-5)^2} = \frac{x^2-10x+24}{(x-5)^2}$ und $f''(x) = \frac{2}{(x-5)^3}$ $\Rightarrow$ H(4|1) und T(6|5)

Aufgabe 5: Rationale Funktionen mit Parameter

a) $f_t(x) = x + \frac{4t^3}{(x-t)^2} = \frac{x^3-2tx^2+t^2x+4t^3}{(x-t)^2}$ $\Rightarrow$ D = $\mathbb{R}\setminus\{t\}$, $S_y(0|4t)$, $S_x(t|0)$, senkrechte Asymptote ohne VZW bei x = t und schiefe Asymptote y = x. $f_t'(x) = 1 - \frac{8t^3}{(x-t)^3}$ und $f_t''(x) = \frac{24t^3}{(x-t)^4}$ $\Rightarrow$ H(3t|4t) mit Ortskurve $y = \frac{4}{3}x$

b) $f_t(x) = x + t + \frac{1}{x-t} = \frac{x^2-t^2+1}{x-t}$ = $\Rightarrow$ D = $\mathbb{R}\setminus\{t\}$mit $S_y(0|-\frac{1}{t})$, $S_x(\pm\sqrt{t^2-1}\,|0)$ ohne VZW nur für $|t| \geq 1$, senkrechte Asymptote mit VZW bei x = t und schiefe Asymptote y = x + t. $f_t'(x) = 1 - \frac{1}{(x-t)^2}$ und $f_t''(x) = \frac{2}{(x-t)^3}$ $\Rightarrow$ H(t − 1|2t − 2) mit Ortskurve y = 2x und T(t + 1|2t + 2) mit der gleichen Ortskurve y = 2x (!)

c) $f_t(x) = \frac{x-t}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{t}{x^2}$ $\Rightarrow$ D = $\mathbb{R}\setminus\{0\}$mit $S_x(t|0)$ mit VZW, senkrechte Asymptote ohne VZW bei x = 0 und waagrechte Asymptote y = 0. $f_t'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2t}{x^3} = \frac{2t-x}{x^3}$ und $f_t''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{6t}{x^4} = \frac{2x-6t}{x^4}$ $\Rightarrow$ H($2t|\frac{1}{4t}$) mit Ortskurve $y = \frac{1}{2x}$ und W($3t|\frac{2}{9t^2}$) mit Ortskurve $y = \frac{2}{x^2}$.

d) $f_t(x) = \frac{x}{(x-t)^2}$ $\Rightarrow$ D = $\mathbb{R}\setminus\{t\}$mit $S_y(0|0)$ mit VZW, senkrechter Asymptote ohne VZW bei x = t und waagrechter Asymptote y = 0. $f_t'(x) = -\frac{x+t}{(x-t)^3}$ und $f_t''(x) = \frac{2x+4t}{(x-t)^4}$ $\Rightarrow$ T($-t|-\frac{1}{4t}$) mit Ortskurve $y = \frac{1}{4x}$ und W($-2t|-\frac{2}{9t}$) mit Ortskurve $y = \frac{4}{9x}$.

e) $f_t(x) = \frac{x+t}{(x-t)^2} \Rightarrow D = \mathbb{R}\backslash\{t\}$ mit $S_y(0|\frac{1}{t})$, $S_x(-t|0)$ mit VZW, senkrechter Asymptote ohne VZW bei $x = t$ und waagrechter Asymptote $y = 0$. $f_t'(x) = -\frac{x+3t}{(x-t)^3}$ und $f_t''(x) = \frac{2x-8t}{(x-t)^4} \Rightarrow T(-3t|-\frac{1}{8t})$ mit Ortskurve $y = \frac{3}{8x}$ und $W(4t|\frac{5}{4t})$ mit Ortskurve $y = \frac{5}{x}$.

f) $f_t(x) = x + 3t + \frac{4t^2}{x-t} = \frac{(x+t)^2}{x-t} \Rightarrow D = \mathbb{R}\backslash\{t\}$ mit $S_y(0|-1)$, $S_x(-t|0)$ ohne VZW, senkrechter Asymptote mit VZW bei $x = t$ und schiefer Asymptote $y = x + 3t$. $f_t'(x) = 1 - \frac{4t^2}{(x-t)^2} = \frac{x^2-2tx-3t^2}{(x-t)^2}$ und $f_t''(x) = \frac{8t^2}{(x-t)^3} \Rightarrow H(-t|0)$ mit Ortskurve $y = 0$ und $T(3t|8t)$ mit Ortskurve $y = \frac{8}{3}x$.

Aufgabe 6: Vermischte Aufgaben zu Funktionenscharen

a) $f_t'(x) = (2tx - x^2)\cdot e^{-\frac{x}{t}}$ und $f_t''(x) = (\frac{1}{t}x^2 - 4x + 2t)\cdot e^{-\frac{x}{t}} \Rightarrow T(0|0)$ und $H_t(2t|\frac{4t^3}{e^2}) \Rightarrow$ Ortskurve der Hochpunkte $y = \frac{1}{2e^2}x^3$ und achsensymmetrische Parabel durch T und H_t $p_t(x) = \frac{t}{e^2}x^2$.

b) $f_t'(x) = (\frac{1}{t} - x)\cdot e^{-tx}$ und $f_t''(x) = (tx - 2)\cdot e^{-tx} \Rightarrow H(\frac{1}{t}|\frac{1}{te})$ und $W(\frac{2}{t}|\frac{2}{t^2e^2}) \Rightarrow$ Ortskurven $y = \frac{1}{e}x$ für die Hochpunkte und $y = \frac{2}{e^2}x^2$ für die Wendepunkte

c) Schnittpunkte $S_{fg}(0|1)$ und Schnittwinkel $\alpha_{fg} = 90°$

d) $f_t'(x) = (\frac{1}{t} - x)\cdot e^{-tx}$ und $f_t''(x) = (tx - 2)\cdot e^{-tx} \Rightarrow W_t(\frac{2}{t}|\frac{2}{t^2e^2}) \Rightarrow$ Wendetangente $w_t(x) = -\frac{1}{te^2}x + \frac{4}{t^2e^2}$ mit den Achsenschnittpunkte $S_{yt}(0|\frac{4}{t^2e^2})$ und $S_{xt}(\frac{4}{t}|0) \Rightarrow$ Dreiecksfläche $A_t = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{t^2e^2}\cdot\frac{4}{t} = \frac{8}{t^3e^2}$

e) $f_t'(x) = -t^3x\cdot e^{-tx}$ und $f_t''(x) = (t^4x - t^3)\cdot e^{-tx} \Rightarrow W(\frac{1}{t}|\frac{2t}{e}) \Rightarrow$ Wendetangente $w_t(x) = -\frac{t^2}{e}\cdot x + \frac{3t}{e}$ mit $S_{tx}(\frac{3}{t}|0)$ und $S_{yt}(0|\frac{3t}{e}) \Rightarrow$ Dreiecksfläche $A_t = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{t}\cdot\frac{3t}{e} = \frac{9}{2e}$.

f) $f_t'(x) = 1 - e^{t-x}$ und $f_t''(x) = e^{t-x} \Rightarrow T(t|t + 1)$ liegt auf der x-Achse für $t = -1$.

g) $f_t'(x) = te^{tx} + t(t + 1)\cdot e^{(t+1)x}$ und $f_t''(x) = t^2e^{tx} + t(t + 1)^2e^{(t+1)x} = [t + (t + 1)^2e^x]te^{tx} \Rightarrow$ Die Gleichung $f_t''(x) = 0$ hat die Lösung $x_t = \ln\left(-\frac{t}{(t+1)^2}\right)$ nur für $t > 0$.

h) Alle Schaubilder gehen durch $P(0|1)$. Die Tangenten $t_t(x) = tx + 1$ und die Normalen $n_t(x) = -\frac{1}{t}x + 1$ durch P schneiden die x-Achse in $S_{tt}(-\frac{1}{t}|0)$ und $S_{nt}(t|0)$. Das Dreieck $S_{tt}PS_{nt}$ hat den Flächeninhalt $A(t) = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot(t + \frac{1}{t})\cdot 1$ mit $A'(t) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{t^2})$ und $A''(t) = \frac{1}{t^3}$. A(t) hat ein relatives Minimum ($A'(t) = 0$ und $A''(t) > 0$) für $t = 1$. Wegen $\lim\limits_{t\to\infty} A(t) = \lim\limits_{t\to 0}$ A(t) handelt es sich auch um ein globales Minimum.

i) Ansatz $f_t(x(t)) = 1 \Leftrightarrow x + 2 + \ln(x+2) = x + t \Leftrightarrow x(t) = e^{t-2} - t$ mit $x'(t) = e^{t-2} - 1$ und $x''(t) = e^{t-2} \Rightarrow$ Minimum von x bei $t = 2$, da $x'(2) = 0$ und $x''(t) > 0$

Aufgabe 7: Extremwertaufgaben mit Exponentialfunktionen

a) $A(u) = b\cdot h = 2u\cdot f(u) = 2u\cdot e^{-u^2}$ mit $u > 0$, $A'(u) = 2(1 - 2u^2)\cdot e^{-u^2}$ und $A''(u) = 4\cdot(2u^3 - 3u)\cdot e^{-u^2} \Rightarrow$ rel Max bei $u = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ mit $A(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{2}{e}}$ und $A(u) \to 0$ für $u \to 0$ und $u \to \infty \Rightarrow$ abs Max bei $u = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

b) $A(u) = b\cdot h = u\cdot f(u) = u\cdot e^{-u}$ mit $u > 0$, $A'(u) = (1 - u)\cdot e^{-u}$ und $A''(u) = (u - 2)\cdot e^{-u} \Rightarrow$ rel Max bei $u = 1$ mit $A(1) = e^{-1}$ und $A(0) = \lim\limits_{u\to\infty} A(u) = 0 \Rightarrow$ abs Max bei $u = 1$.

c) $A(u) = b\cdot h = u\cdot f(u) = (2u - u^3)\cdot e^u$ mit $0 \le u \le -1 + \sqrt{3}$, $A'(u) = (2 + 2u - 3u^2 - u^3)\cdot e^u = (u - 1)\cdot(-u^2 - 4u - 2)\cdot e^u$ und $A''(u) = (2 + 4u - 9u^2 - 4u^3)\cdot e^u \Rightarrow$ rel Max bei $u_1 = 1$ ($u_{2/3} = -2 \pm \sqrt{2} < 0$) mit $A(1) = e$ und $A(0) = 0$ und $A(-1 + \sqrt{3}) \approx 2{,}23 < e \approx 2{,}71828 \Rightarrow$ abs Max bei $u = 1$.

Aufgabe 8: Tangenten und Normalen an Exponentialfunktionen

a) Tangente $t_t(x) = tx + 1$ mit $S_{tx}(-\frac{1}{t}|0)$ und Normale $n_t(x) = -\frac{1}{t}x + 1$ mit $S_x(t|0)$ bilden mit der x-Achse ein Dreieck mit der Grundseite $g(t) = t + \frac{1}{t}$ und der Höhe $h = 1$. Es hat den Flächeninhalt $A(t) = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$ mit $A'(t) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{t^2})$. er ist minimal für $t = 1$ (VZW der 1. Ableitung von − nach +) mit $A(1) = 1$ FE.

b) Symmetrie zum Ursprung, $f_t'(x) = -t(x^2 - 1)\cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2-3)}$, $f_t''(x) = tx(x^2 - 3)\cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2-3)} \Rightarrow H(1|te)$, $T(-1|-te)$, $W_{1/3}(\mp\sqrt{3}|\pm t\sqrt{3})$ und $W_2(0|0)$ (einfache NST mit VZW bei f_t''!) Dreieck OPQ mit $O(0|0)$, $P(\frac{3}{2}\sqrt{3}|0)$ und $Q(\frac{6\sqrt{3}t^3}{1+4t^3}|\frac{3\sqrt{3}t}{1+4t^3}) \Rightarrow$ $A(t) = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h = \frac{27}{4}\cdot\frac{t}{1+4t^3}$ mit $A'(t) = \frac{27}{4}\cdot\frac{1-8t^3}{(1+4t^3)^2} \Rightarrow$ rel Max (NST von A' mit VZW von − nach +) bei $t = \frac{1}{2}$ mit $A(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$, $A(0) = \lim\limits_{t\to\infty} A(t) = 0 \Rightarrow$ abs Max bei $t = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 9: Extremwertaufgaben mit rationale Funktionen

a) $U = 2a + 2b$ mit $a\cdot b = 36 \Rightarrow U(a) = 2a + \frac{72}{a}$ mit $U'(a) = 2 - \frac{72}{a^2} = 0 \Leftrightarrow a = \pm 6$, wobei aber $D_A =]0; \infty[$. Da $U(a) \to \infty$ für $a \to 0$ und $a \to \infty$ ist bei $a = b = 6$ cm mit $U = 24$ cm ein relatives und absolutes Minimum von U.

b) $U = 2r + s$ mit $A = \frac{1}{2}\cdot s\cdot r = 100 \Rightarrow U(r) = 2r + \frac{200}{r}$ mit $U'(r) = 2 - \frac{200}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \pm 10$, wobei aber $D_A =]0; \infty[$. Da $U(r) \to \infty$ für $r \to 0$ und $r \to \infty$ ist bei $r = 10$ cm und $s = 20$ cm mit $U = 40$ cm mit ein relatives und absolutes Minimum von U.

c) $A(x) = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^4}}$ ist genau dann minimal, wenn $B(x) = x^2 + \frac{4}{x^4}$ minimal ist. Mit $B'(x) = 2x - \frac{16}{x^5} = 0$ ergibt sich $x = \pm\sqrt{2}$ mit $D_A =]0; \infty[$. Da $B(x) \to \infty$ für $x \to 0$ und $x \to \infty$ ist bei $x = \sqrt{2}$ mit $B(\sqrt{2}) = 3\text{ cm}^2$ bzw. $A(\sqrt{2}) = \sqrt{3}$ cm ein relatives und absolutes Minimum von B und von A.

d) $A(x) = 2x\cdot f(x) = \frac{40x}{x^2+5}$ mit $A'(x) = \frac{200-40x^2}{(x^2+5)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ mit $D_A =]0; \infty[$. Da $A(x) \to \infty$ für $x \to 0$ und $x \to \infty$ ist bei $x = \sqrt{5}$ cm mit $A(\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}\text{ cm}^2$ ein relatives und absolutes Maximum von A.

e) $U = 2b + 2r + \pi r$ mit $A = 2rb + \frac{\pi}{2}r^2 = 8 \Leftrightarrow b = \frac{4}{r} - \frac{\pi}{4}r \Rightarrow U(r) = \frac{\pi}{2}r + 2r + \frac{8}{r}$ mit $U'(r) = \frac{\pi}{2} + 2 - \frac{8}{r^2} = 0$ für $r = \pm\frac{4}{\sqrt{4+\pi}} \approx \pm 1{,}5$. Wegen $A = 2rb + \frac{\pi}{2}r^2 = 8$ gilt $r \le \frac{4}{\sqrt{\pi}}$, also $D_U =]0; \frac{4}{\sqrt{\pi}}] \approx]0; 2{,}26]$. Da $U(r) \to \infty$ für $r \to 0^+$ und $U(\frac{4}{\sqrt{\pi}}) = 4\sqrt{\pi} + \frac{8}{\sqrt{\pi}} \approx 11{,}6$ m ist bei $r = \frac{4}{\sqrt{4+\pi}} \approx 1{,}5$ m mit $U(\frac{4}{\sqrt{4+\pi}}) = 4\sqrt{4+\pi} \approx 10{,}69$ m ein relatives und absolutes Minimum.

f) $= 2\pi rh + 2\pi r^2$ mit $V = \pi r^2 h = 1000\text{ cm}^3 \Leftrightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2} \Rightarrow O(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ mit $O'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0$ für $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42$ cm, wobei $D_O =]0; \infty[$. Da $O(r) \to \infty$ für $r \to 0$ und $r \to \infty$ ist bei $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42$ cm und $h = 10{,}86$ cm mit $O(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}) \approx 553{,}58\text{ cm}^2$ ein relatives und absolutes Minimum von O. Zum Vergleich: Ein Würfel mit 1 Liter Fassungsvermögen hätte eine Kantenlänge von $a = 10$ cm und eine Oberfläche von $O_W = 6a^2 = 600\text{ cm}^2$!

g) $= O_{Halbkugel} + O_{Boden} + O_{Mantel} = 2\pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi rh = 3\pi r^2 + 2\pi rh$ mit $V = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 1000\text{ cm}^3 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2} - \frac{2r}{3} \Rightarrow$ $O(r) = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ mit $O'(r) = \frac{10}{3}\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0$ für $r = \sqrt[3]{\frac{600}{\pi}}$ cm ≈ 5,76 cm, wobei $D_O =]0; \sqrt[3]{\frac{1500}{\pi}}] =]0; 10\sqrt[3]{\frac{1,5}{\pi}}] \approx]0\text{ cm}; 7,81\text{ cm}[$. Da $O(r) \to \infty$ für $r \to 0^+$ und $O(10\sqrt[3]{\frac{1,5}{\pi}}) = 300\sqrt[3]{2,25\pi}\text{ cm}^2 \approx 575,7\text{ cm}^2$ ist bei $r = \sqrt[3]{\frac{600}{\pi}}$ cm ≈ 5,76 cm und h ≈ 26,3 cm mit $O(\sqrt[3]{\frac{600}{\pi}}) = 519,2\text{ cm}^2$ ein relatives und absolutes Minimum von O.

h) $= 2a^2 + 4ah$ mit $V = a^2h = 1000\text{ cm}^3 \Rightarrow h = \frac{1000}{a^2} \Rightarrow O(a) = 2a^2 + \frac{4000}{a}$ mit $O'(a) = 4a - \frac{4000}{a^2} = 0$ für a = 10 cm, wobei $D_O =]0; \infty[$. Da $O(a) \to \infty$ für $a \to 0^+$ und $a \to \infty$, ist bei a = 10 cm und h = 10 cm mit $O(10) = 600\text{ cm}^2$ ein relatives und absolutes Minimum von O.