5.4. Prüfungsaufgaben zu Ableitungsregeln

Aufgabe 1: Potenz- und Exponentialfunktionen im Vergleich (6)
Vergleichen Sie die Schaubilder der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2^x$ sowie ihrer Umkehrfunktionen f^{-1} und g^{-1} im Hinblick auf Definitions- und Wertebereiche, Asymptoten, Achsenschnittpunkte, Ableitungen und Extrempunkte anhand der untenstehenden Tabelle

Funktion	$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x) =$	$g(x) = 2^x$	$g^{-1}(x) =$
D =				
W =				
Asymptoten				
Achsenschnittpunkte				
Extrema				
Ableitung	$f'(x) =$	$f^{-1}{}'(x) =$	$g(x) =$	$g^{-1}{}'(x) =$

Lösung

Funktion	$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$	$g(x) = 2^x$	$g^{-1}(x) = \log_2(x)$
D =	$\mathbb{R}$	$[0; \infty[$	$\mathbb{R}$	$]0; \infty[$
W =	$[0; \infty[$	$[0; \infty[$	$]0; \infty[$	$\mathbb{R}$
Asymptoten	-	-	$y = 0$ für $x \to -\infty$	$x = 0$ für $y \to -\infty$
Achsenschnittpunkte	$S(0\|0)$	$S(0\|0)$	$S(0\|1)$	$S(1\|0)$
Extrema	$T(0\|0)$	-	-	-
Ableitung	$f'(x) = 2x$	$f^{-1}{}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$g(x) = \ln(2)\cdot 2^x$	$g^{-1}{}'(x) = \frac{1}{\ln 2\cdot x}$

Aufgabe 2: Potenz- und Exponentialfunktionen im Vergleich (6)
Vergleichen Sie die Schaubilder der Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(x) = 3^x$ sowie ihrer Umkehrfunktionen f^{-1} und g^{-1} im Hinblick auf Definitions- und Wertebereiche, Asymptoten, Achsenschnittpunkte, Ableitungen und Extrempunkte anhand der untenstehenden Tabelle.

Funktion	$f(x) = x^3$	$f^{-1}(x) =$	$g(x) = 3^x$	$g^{-1}(x) =$
D =				
W =				
Asymptoten				
Achsenschnittpunkte				
Extrema				
Ableitung	$f'(x) =$	$f^{-1}{}'(x) =$	$g(x) =$	$g^{-1}{}'(x) =$

Lösung

Funktion	$f(x) = x^3$	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	$g(x) = 3^x$	$g^{-1}(x) = \log_3(x)$
D =	$\mathbb{R}$	$[0; \infty[$	$\mathbb{R}$	$]0; \infty[$
W =	$\mathbb{R}$	$[0; \infty[$	$]0; \infty[$	$\mathbb{R}$
Asymptoten	-	-	$y = 0$ für $x \to -\infty$	$x = 0$ für $y \to -\infty$
Achsenschnittpunkte	$S(0\|0)$	$S(0\|0)$	$S(0\|1)$	$S(1\|0)$
Extrema	-	-	-	-
Ableitung	$f'(x) = 3x^2$	$f^{-1}{}'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$	$g(x) = \ln(3)\cdot 3^x$	$g^{-1}{}'(x) = \frac{1}{\ln 3\cdot x}$

Aufgabe 3: Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion (4)
Berichten Sie kurz anhand einer Skizze über die wichtigsten Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion exp(x).

Lösung
$D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$, $\exp'(x) = \exp(x)$ (4)

Aufgabe 4: Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion (4)
Berichten Sie kurz anhand einer Skizze über die wichtigsten Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion ln(x).

Lösung
$D = \mathbb{R}^+$, $W = \mathbb{R}$, $\ln x \to -\infty$ für $x \to 0^+$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ (4)

Aufgabe 5: Kettenregel
Bilden Sie die Ableitung und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

a) $f(x) = e^{-x^2+x}$
b) $f(x) = e^{x^2-x}$
c) $f(x) = \exp(3x^4 - \sqrt{x})$
d) $f(x) = (\sin(x))^5$
e) $f(x) = (\cos(x))^5$
f) $f(x) = [3x^4 - \sin(x)]^{38}$

Lösungen

a) $f'(x) = (-2x + 1)\cdot e^{-x^2+x}$, (2)
b) $f'(x) = (2x - 1)\cdot e^{x^2-x}$, (2)
c) $f'(x) = (12x^3 - \frac{1}{2\sqrt{x}})\exp(3x^4 - \sqrt{x})$ (2)
d) $f'(x) = -5\cdot\sin(x)\cdot(\cos(x))^4$ (2)
e) $f'(x) = 5\cdot\cos(x)\cdot(\sin(x))^4$ (2)
f) $f'(x) = 38(12x^3 - \cos(x))(3x^4 - \sin(x))^{37}$ (2)

Aufgabe 6: Produktregel (6)
Bilden Sie die Ableitung und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

a) $f(x) = x\cdot e^x$
b) $f(x) = (2x + 1)\cdot\ln x$
c) $f(x) = (x^2 - 1)\cdot\sin(x)$
d) $f(x) = (x^2 + 1)\cdot\cos(x)$
e) $f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)$

Lösungen

a) $f'(x) = (1 + x)\cdot e^x$, (2)

b) $f'(x) = 2\cdot\ln x + 2 + \frac{1}{x}$ (2)

c) $f'(x) = -2x\cdot\sin(x) + (x^2 - 1)\cdot\cos(x)$ (2)

d) $f'(x) = 2x\cdot\cos(x) - (x^2 + 1)\cdot\sin(x)$ (2)

e) $f'(x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2$ (2)

Aufgabe 7: Ketten- und Produktregel

Bilden Sie die Ableitung und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

a) $f(x) = x\cdot\sqrt{x^3 - 1}$

b) $f(x) = x\cdot\sqrt{x^5 - 1}$

c) $f(x) = x\cdot e^{-x}$

d) $f(x) = (1 + x)\cdot e^{2x-1}$

e) $f(x) = (1 - x)\cdot e^{2x+1}$

f) $f(x) = x^3\cdot e^{2x}$

g) $f(x) = 3x\cdot e^{-x+1}$

h) $f(x) = (2x + 1)\cdot e^{-2x}$

i) $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$

j) $f(x) = e^x\cdot\cos(2x + 3)$

Lösungen

a) $f'(x) = \sqrt{x^3 - 1} + \frac{3x^3}{2\sqrt{x^3 - 1}}$ (2)

b) $f'(x) = \sqrt{x^5 - 1} + \frac{5x^5}{2\sqrt{x^5 - 1}}$ (2)

c) $f'(x) = (x - 1)\cdot e^{-x}$, (2)

d) $f'(x) = (2x + 3)\cdot e^{2x-1}$. (2)

e) $f'(x) = (1 - 2x)\cdot e^{2x-1}$. (2)

f) $f'(x) = (3x^2 + 2x^3)e^{2x}$ (2)

g) $f'(x) = 3(1 - x)\cdot e^{-x+1}$ (2)

h) $f'(x) = 2\cdot e^{-2x} + (2x + 1)\cdot(-2)\cdot e^{-2x} = -4x\cdot e^{-2x}$. (2)

i) $f(x) = e^x - e^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^x + e^{-x}$ (2)

j) $f'(x) = e^x[\cos(2x + 3) - 2\sin(2x + 3)]$ (2)

Aufgabe 8: Quotientenregel

Bilden Sie die Ableitung und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

a) $f(x) = \frac{x - 1}{x + 2}$

b) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$

c) $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$

Lösungen

a) $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$

b) $f'(x) = -\dfrac{3}{(x-2)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{-2(x^2+x+1)}{(x^2-1)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{2x^2+2x-2}{(x^2+1)^2}$

Aufgabe 9: Kettenregel beim beschränkten Wachstum (3)
Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 6 - 4\cdot e^{-0,5x}$.
a) Geben Sie die Gleichung der Asymptoten an.
b) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.
c) Skizzieren Sie das Schaubild von f einschließlich der Asymptote.

Lösungen
a) Asymptote $y = 6$ für $x \to +\infty$ (1)
b) f ist streng monoton wachsend, da $f'(x) = 2e^{-0,5x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (1)
c) Schaubild mit Asymptote (1)

Aufgabe 10: Kettenregel beim beschränkten Wachstum (3)
Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 3 - 2\cdot e^{-2x}$.
a) Geben Sie die Gleichung der Asymptoten an.
b) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.
c) Skizzieren Sie das Schaubild von f einschließlich der Asymptote.

Lösungen
a) Asymptote $y = 3$ für $x \to +\infty$ (1)
b) f ist streng monoton wachsend, da $f'(x) = 4e^{-2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (1)
c) Schaubild mit Asymptote (1)

Aufgabe 11: Ketten- und Produktregel bei einer Wurzelfunktion(10)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$. Ihr Graph heißt G.
Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f an. Untersuchen Sie G auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte. Berechnen Sie f'(0) und skizzieren Sie G.

Lösungen
$D = [-1;1]$ (1)
Symmetrie zum Ursprung, da $f(-x) = -f(x)$ (1)
Achsenschnittpunkte $S_{x1}(0 \mid 0)$ und $S_{x2/3}(\pm 1 \mid 0)$ (1)

1. Ableitung: $f'(x) = 2\sqrt{1-x^2} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ (1)

2. Ableitung $f''(x) = \dfrac{-8x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{4x^3-2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \dfrac{8x^3-8x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} - \dfrac{4x^3-2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \dfrac{4x^3-6x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ (1)

Extrempunkte $H(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid 1)$ und $T(-\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid -1)$ (NST von f' mit VZW von + nach − bzw. umgekehrt) (2)
Wendepunkt $W(0 \mid 0)$ (NST von f'' mit VZW) (1)
$f'(0) = 2$ und Skizze (2)