

## 5.4. Anwendungsaufgaben mit rationalen Funktionen

### Aufgabe 1: Einnahmen, Kosten, Gewinn (7)

Eine Kaufhauskette kauft einen bestimmten Taschenrechner zu einem Bezugspreis von 25 €. Marktbeobachtungen haben folgenden funktionalen Zusammenhang zwischen dem Verkaufspreis  $p$  (in €) und der monatlichen Verkaufszahl  $N$  (in Stück) ergeben:

$$N(p) = \frac{5 \cdot 10^6}{p^2} - 3000$$

- Skizzieren Sie das Schaubild zu  $N(p)$  und geben Sie an, welcher Bereich ökonomisch sinnvoll ist. (2)
- Geben Sie die Funktionsgleichungen für die folgenden Größen in Abhängigkeit von  $p$  an: (3)  
Die monatlichen Kosten  $K(p)$   
Die monatlichen Einnahmen  $E(p)$   
Den monatlichen Gewinn  $G(p)$
- Berechnen Sie näherungsweise, für welchen Wert von  $p$  der monatliche Gewinn maximal wird. Wie groß ist der maximale Gewinn? (2)
- Wenn das Unternehmen beim Hersteller pro Monat mindestens 3000 Taschenrechner abnimmt, senkt dieser den Bezugspreis auf 20 € pro Stück. Soll das Unternehmen das Angebot unter dem Gesichtspunkt einer Gewinnmaximierung annehmen? (4)

### Lösung

Skizze mit sinnvollem Bereich  $N(p) > 0 \Leftrightarrow 25\text{€} < p < 40\text{€}$  (2)

$$K(p) = 25\text{€} \quad N(p) = \left( \frac{5 \cdot 10^6}{p^2} - 3000 \right) \cdot 25\text{€} \quad (1)$$

$$E(p) = p \cdot N(p) = \left( \frac{5 \cdot 10^6}{p^2} - 3000 \right) \cdot p \quad (1)$$

$$G(p) = E(p) - K(p) = \left( \frac{5 \cdot 10^6}{p^2} - 3000 \right) \cdot (p - 25\text{€}) \quad (1)$$

$$G(p) \text{ hat ein absolutes Maximum bei } p = 31,40\text{€ mit } G(31,40) = 13255,7\text{€ (GTR)} \quad (2)$$

### Aufgabe 2: Geschwindigkeit und Kraftstoffverbrauch (15)

Bei Testfahrten auf dem Gelände eines Automobilherstellers wird ein Testfahrzeug automatisch gesteuert. Eine

Testfahrt mit der durch die Funktion  $v$  mit  $v(t) = \frac{1600 \cdot t}{10 \cdot t + 1}$  mit  $0 \leq t \leq 3$  und  $t$  in Stunden;  $v(t)$  in km/h gegebenen

Geschwindigkeits-Zeitfunktion wird nach 3 Stunden abgebrochen. Die Funktion  $k$  mit  $k(x) = \frac{1000}{250 - x}$  mit  $x \geq 0$  und  $x$  in km/h;  $k(x)$  in Liter pro 100 km beschreibt grob den Kraftstoffverbrauch des Testfahrzeugs.

- Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit des Testfahrzeugs während dieser Testfahrt ständig zunimmt.  
Wie lange dauert es, bis das Testfahrzeug die Geschwindigkeit 40 km/h erreicht?  
Welcher Kraftstoffverbrauch ergibt sich mittels der Funktion  $k$  bei dieser Geschwindigkeit?
- Begründen Sie, dass durch  $\frac{k(v(t)) \cdot v(t)}{100}$  der momentane Kraftstoffverbrauch zum Zeitpunkt  $t$  in Liter pro Stunde beschrieben werden kann.  
Berechnen Sie damit den durchschnittlichen Kraftstoffverbrauch während der Testfahrt in Liter pro Stunde.
- Bei Geschwindigkeiten unter 50 km/h beschreibt die Funktion  $k$  den tatsächlichen Kraftstoffverbrauch (in Liter/100 km) nicht richtig, da das Testfahrzeug einen minimalen Kraftstoffverbrauch von 2,5 Liter pro Stunde hat.  
Geben Sie für  $0 < x < 160$  ( $x$  in km/h) eine abschnittsweise definierte Funktion  $f$  an, die den Kraftstoffverbrauch des Testfahrzeugs (in Liter/100 km) beschreibt und dabei den Minimalverbrauch berücksichtigt. Skizzieren Sie das Schaubild von  $f$ .

### Lösung

a)  $v'(t) = \frac{1600}{(10 \cdot t + 1)^2} > 0 \Rightarrow v$  ist streng monoton wachsend (2)

$$v(t) = 40 \Leftrightarrow t = \frac{1}{30} \text{ h} = 2 \text{ min} \quad (1)$$

$$k(40) = \frac{100}{21} \approx 4,76 \text{ Liter/100 km} \quad (1)$$

b) Einem Verbrauch von  $k(v(t))$  Litern pro 100 km entspricht ein Verbrauch von  $\frac{k(v(t))}{100}$  Litern pro km. (1)

Da in einer Stunde  $v(t)$  Kilometer zurückgelegt werden, werden  $\frac{k(v(t))}{100} \cdot v(t)$  Liter/h verbraucht. (2)

Gesamtverbrauch:

$$\frac{k(v(t)) \cdot v(t)}{100} = \frac{\frac{1000}{250 - \frac{1600t}{10t+1}} \cdot \frac{1600t}{10t+1}}{100} = \frac{10}{250 - \frac{1600t}{10t+1}} \cdot \frac{1600t}{10t+1} = \frac{16000t}{2500t + 250 - 1600t} = \frac{320t}{18t + 5} \quad (2)$$

Durchschnittlicher Verbrauch:  $41,1 : 3 = 13,7$  Liter pro Stunde (1)

c) Modellierung: Für  $0 < x < 50$  km/h ist der stündliche Kraftstoffverbrauch konstant  $2,5 = \frac{k(v(t))}{100} \cdot v(t) \Leftrightarrow$

$$k(v(t)) = \frac{250}{v(t)} \text{ oder mit } x = v(t): k(x) = \frac{250}{x} \text{ für } 0 < x < 50. \quad (2)$$

Skizze (3)

### Aufgabe 3: Kennlinie eines Spannungsteilers (9)

Bei einer Spannungsteilerschaltung berechnet sich die Kennlinie aus  $U_t(x) = \frac{2 \cdot t \cdot x}{-x^2 + 10x + 10t}$ . Dabei sind

$x$  = Regelwiderstand in  $\Omega$ ,

$t$  = Belastungswiderstand in  $\Omega$  und

$U$  = Spannung am Belastungswiderstand in V.

a) Untersuchen Sie  $U_t(x)$  auf Definitionsbereich, Asymptoten und Achsenschnittpunkte. (3)

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Kurvenschar. (2)

c) Berechnen Sie  $U_t'(x)$  und zeigen Sie, dass die Kennlinie keine Extrema besitzt. (2)

d) Bestimmen und begründen Sie  $\lim_{t \rightarrow \infty} U_t(x)$  und geben Sie die Gleichung der Kennlinie für den Grenzfall  $t \rightarrow \infty$  an. (2)

### Lösungen:

a)  $D = \mathbb{R} / \{5 \pm \sqrt{25 - 10t}\}$ , senkrechte Asymptoten bei  $x_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25 - 10t}$  (Nenner ohne Zähler), waagrecht Asymptote  $y = 0$  (Nennergrad > Zählergrad),  $S(0|0)$  ist einziger Achsenschnittpunkt und gleichzeitig gemeinsamer Punkt aller Kurven, da unabhängig von  $t$ .

b)  $U_{t1}(x) = U_{t2}(x) \Leftrightarrow (t_1 - t_2)x^3 - 10(t_1 - t_2)x^2 = 0 \Rightarrow S_1(0|0)$  (doppelt  $\Rightarrow$  Berührungspunkt!) und  $S_2(10|2)$

c)  $U_t'(x) = \frac{2t(x^2 + 10)}{(-x^2 + 10x + 10t)^2} > 0$  für alle  $x \in D$ .

d)  $\lim_{t \rightarrow \infty} U_t(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot t \cdot x}{-x^2 + 10x + 10t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot x}{10} = \frac{x}{5}$  (d l'Hospital anwenden, wobei  $t$  als Variable und  $x$  als

Parameter aufgefasst werden muß)  $\Rightarrow$  Für  $x \rightarrow \infty$  strebt  $U_t(x)$  gegen  $y = \frac{x}{5}$

#### Aufgabe 4: Zustandsgleichung für Gase (9)

Die Zustandskurve für Gase bei tiefen Temperaturen lautet  $p(x) = \frac{RT}{x-b} - \frac{a}{x^2}$ . Dabei sind

$p$  = Druck in bar,

$x$  = molares Volumen in Liter/mol,

$T$  = absolute Temperatur in Kelvin K und

$R, a, b$  = allgemeine Gaskonstante bzw. Van-der-Waals-Konstanten des jeweiligen Gases

a) Untersuchen Sie  $p(x)$  auf Definitionsbereich, Asymptoten und Achsenschnittpunkte. (3)

b) Berechnen Sie  $p'(x)$  und geben Sie die Ortskurve  $p_E(x)$  der Extrempunkte an. **Lösung:**  $p_E(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{2ab}{x^3}$  (2)

c) Geben Sie die Koordinaten des Hochpunktes der Ortskurve  $p_E(x)$  an. **Lösung:**  $H_E(3b | \frac{a}{27b^2})$  (1)

d) Geben Sie die Temperatur  $T$  an, bei der der Hochpunkt der Ortskurve erreicht wird. **Lösung:**  $RT = \frac{8a}{27b}$  (1)

e) Berechnen Sie  $p''(x)$  für diese Temperatur und zeigen Sie, dass der Hochpunkt der Ortskurve gleichzeitig ein Sattelpunkt der Zustandskurve ist. (2)

#### Lösungen

a)  $D = \mathbb{R}/\{0; b\}$ , senkrechte Asymptoten bei  $x_1 = 0$  ohne VZW (doppelte Nennerst) und  $x_2 = b$  mit VZW (einfache Nennerst), waagrechte Asymptote bei  $y = 0$  (Nennergrad > Zählergrad),

$$S_{1/2}(\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4abRT}}{2RT} | 0)$$

b)  $p'(x) = -\frac{RT}{(x-b)^2} + \frac{2a}{x^3} = 0 \Rightarrow RT = \frac{2a(x-b)^2}{x^3} \Rightarrow p_E(x) = \frac{2a(x-b)}{x^3} - \frac{a}{x^2} = \frac{a}{x^2} - \frac{2ab}{x^3}$ .

c)  $p_E'(x) = -\frac{2a}{x^3} + \frac{6ab}{x^4} = 0 \Rightarrow x = 3b$  und  $p_E(3b) = \frac{a}{27b^2}$ .

d) Aus Teil b) erhält man  $RT(x) = \frac{2a(x-b)^2}{x^3} \Rightarrow RT(3b) = \frac{8a}{27b}$

e)  $p''(x) = \frac{2RT}{(x-b)^3} - \frac{6a}{x^4}$  für beliebige  $T$  und  $p''(x) = \frac{16a}{27b(x-b)^3} - \frac{6a}{x^4}$  für  $RT = \frac{8a}{27b}$ . Die

entsprechende Zustandskurve bei  $RT = \frac{8a}{27b}$  besitzt an der Stelle  $x = 3b$  eine waagrechte Tangente ( $p'(3b) =$

0). Zusätzlich ist aber auch  $p''(3b) = \frac{16a}{27b(2b)^3} - \frac{6a}{(3b)^4} = \frac{2}{27b^3} - \frac{2}{27b^3} = 0$  und da die Nullstelle

einfach ist, hat  $p''$  hier einen VZW, d.h., es handelt sich um einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente, also einen Sattelpunkt.