5.4. Prüfungsaufgaben zur Kurvenuntersuchung von Exponentialfunktionen

Aufgabe 1a: Kurvenuntersuchung (18)
Untersuche $f(x) = x^2 \cdot e^x$ auf Achsenschnittpunkte, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Extrem- und Wendepunkte. Näherungslösungen sind auf zwei Nachkommastellen genau anzugeben. Skizziere anschließend den Graphen im wesentlichen Bereich.

Lösung
Achsenschnittpunkt: $S_y(0|0)$ doppelt ⇒ Extrempunkt (2)
Symmetrie: $f(-x) = (-x)^2 e^{-x} = x^2 \cdot e^{-x} \neq \pm f(x)$ ⇒ keine Symmetrie! (2)

Verhalten für $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x)^2 e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

⇒ x-Achse ist waagrechte Asymptote für $x \to -\infty$ aber $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ (2)
Ableitungen: $f'(x) = (x^2 + 2x)\cdot e^x$, $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)\cdot e^x$ und $f'''(x) = (x^2 + 6x + 6)\cdot e^x$ (2)

Extrempunkte: ($f'(x) = 0$ und $f''(0) </> 0$): $T(0|0)$ und $H(-2|\frac{4}{e^2}) \approx H(-2|0{,}54)$ (3)

Wendepunkte ($f''(x) = 0$ einfach ⇒ VZW): $W_1(-2-\sqrt{2}\;|f(-2-\sqrt{2}\;)) \approx W_1(-3{,}41|0{,}38)$ (2)

$W_2(-2+\sqrt{2}\;|f(-2+\sqrt{2}\;)) \approx W_2(-0{,}58|0{,}19)$ (2)

Beschrifteter Graph (3)

Aufgabe 1b: Kurvenuntersuchung (18)
Untersuche $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ auf Achsenschnittpunkte, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Extrem- und Wendepunkte. Näherungslösungen sind auf zwei Nachkommastellen genau anzugeben. Skizziere anschließend den Graphen im wesentlichen Bereich.

Lösung
Achsenschnittpunkt: $S_y(0|0)$ doppelt ⇒ Extrempunkt (2)
Symmetrie: $f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-(-x)} = x^2 \cdot e^x \neq \pm f(x)$ ⇒ keine Symmetrie (2)

Verhalten für $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ ⇒ x-Achse ist waagrechte Asymptote für $x \to +\infty$ aber $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$ (2)
Ableitungen: $f'(x) = (-x^2 + 2x)\cdot e^{-x}$, $f''(x) = (x^2 - 4x + 2)\cdot e^{-x}$ und $f'''(x) = (-x^2 + 6x - 6)\cdot e^{-x}$ (2)

Extrempunkte: ($f'(x) = 0$ und $f''(0) </> 0$): $T(0|0)$ und $H(2|\frac{4}{e^2})$ (3)

Wendepunkte ($f''(x) = 0$ einfach ⇒ VZW): $W_1(2-\sqrt{2}\;|f(2-\sqrt{2}\;)) \approx W_1(0{,}58|0{,}19)$ (2)

$W_2(2+\sqrt{2}\;|f(2+\sqrt{2}\;)) \approx W_2(3{,}41|0{,}38)$ (2)

Beschrifteter Graph (3)

Aufgabe 2: Kurvenuntersuchung (18)
Untersuche $f(x) = x\cdot e^{-0{,}5x^2}$ auf Achsenschnittpunkte, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Symmetrie, Extrem- und Wendepunkte. Näherungslösungen sind auf zwei Nachkommastellen genau anzugeben. Skizziere anschließend den Graphen im wesentlichen Bereich.

Lösung
Achsenschnittpunkte: $S_y(0|0)$ einfach ⇒ VZW (2)
Symmetrie: $f(-x) = -x\cdot e^{-0{,}5(-x)^2} = -x\cdot e^{-0{,}5x^2} = -f(x)$ ⇒ Symmetrie zum Ursprung (2)
Verhalten für $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{0{,}5x^2}} = 0$ ⇒ x-Achse ist waagrechte Asymptote für $x \to \pm\infty$ (2)

Ableitungen: $f'(x) = (1-x^2)\cdot e^{-0{,}5x^2}$ und $f''(x) = (x^3 - 3x)\cdot e^{-0{,}5x^2}$ (3)

Extrempunkte ($f'(x) = 0$ und $f''(0) </> 0$): $H/T(\pm 1|\pm\frac{1}{e})$ (3)

Wendepunkte ($f''(x) = 0$ einfach ⇒ VZW): $W_1(0|0)$ sowie $W_{2/3}(\pm\sqrt{3}\;|3\cdot e^{-0{,}75}) \approx W_{2/3}(\pm 1{,}73|\pm 1{,}42)$ (3)
Beschrifteter Graph (3)

Aufgabe 3: Kurvenuntersuchung (15)
Untersuche $f(x) = -ex + e^x$ auf Achsenschnittpunkte, Symmetrie, Asymptoten und Extrempunkte. Näherungslösungen sind auf zwei Nachkommastellen genau anzugeben. Zeichne anschließend den Graphen im wesentlichen Bereich.

Lösung:

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|1)$ und $S_x(1|0)$ (2)
Symmetrie: $f(-x) = ex + e^{-x} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ keine Symmetrie (2)
Ableitungen: $f'(x) = -e + e^x$, $f''(x) = e^x$ und $f'''(x) = e^x$ (2)
Asymptote $g(x) = -ex$ für $x \to -\infty$, denn $f(x) - g(x) = e^x \to 0$ für $x \to -\infty$ und $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ (3)
Extrempunkte: ($f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$): $T(1|0)$ (3)
Beschrifteter Graph (3)

Aufgabe 4: Kurvenuntersuchung
Untersuche $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ auf Achsenschnittpunkte, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Extrem- und Wendepunkte. Näherungslösungen sind auf zwei Nachkommastellen genau anzugeben. Zeichne anschließend den Graphen im wesentlichen Bereich.

Lösung

Achsenschnittpunkt: $S(0|0)$ (1)
waagrechte Asymptote $f(x) \to 0$ für $x \to +\infty$ (1)
Ableitungen: $f'(x) = (1-x) \cdot e^{1-x}$, $f''(x) = (x-2) \cdot e^{1-x}$, $f'''(x) = (3-x) \cdot e^{1-x}$ (2)
Hochpunkt: ($f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$): $H(1|1)$ (2)
Wendepunkt: ($f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ oder VZW): $W(2|\frac{2}{e})$ (2)
Beschrifteter Graph (1)

Aufgabe 5: Kurvenuntersuchung

Untersuche $f(x) = \frac{e^x}{x}$ auf Asymptoten und Extrempunkte. Näherungslösungen sind auf zwei Nachkommastellen genau anzugeben. Zeichne anschließend den Graphen im wesentlichen Bereich.

Lösung
senkrechte Asymptote bei $x = 0$ (NST nur im Nenner) (1)
waagrechte Asymptote $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$ (1)
Ableitungen: $f'(x) = \frac{(x-1) \cdot e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}$, $f''(x) = \frac{(x^2 - 2x + 2) \cdot e^x}{x^3}$ (2)
Extrempunkte: ($f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$): $T(1|e)$ (2)
Beschrifteter Graph (2)

Aufgabe 6: Kurvenuntersuchung (10)
Untersuche die Funktion $f(x) = (x - 2) \cdot e^x$ auf Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne den Graphen im Bereich $-3 \leq x \leq 3$ bzw. $-3 \leq y \leq 3$ mit 1 LE = 1 cm.

Lösung

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|2)$ und $S_x(2|0)$ (2)
Ableitungen: $f'(x) = (x-1) \cdot e^x$, $f''(x) = x \cdot e^x$ und $f'''(x) = (x+1) \cdot e^x$ (2)
Asymptoten: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ negative x-Achse ist Asymptote (1)
Extrema: $T(1|-e)$ (2)
Wendpunkte: $(0|2)$ (2)
Beschrifteter Graph (1)

Aufgabe 7: Kurvenuntersuchung (10)
Untersuche die Funktion $f(x) = (x - 1) \cdot e^x$ auf Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne den Graphen im Bereich $-5 \leq x \leq 1$ bzw. $-1 \leq y \leq 5$ mit 1 LE = 1 cm.

Lösung

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|-1)$ und $S_x(1|0)$ (2)
Ableitungen: $f'(x) = x \cdot e^x$, $f''(x) = (x+1) \cdot e^x$ und $f'''(x) = (x+2) \cdot e^x$ (2)
Asymptoten: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ negative x-Achse ist Asymptote (1)
Extrema: $T(0|-1)$ (2)
Wendpunkte: $(-1|-\frac{2}{e})$ (2)
Beschrifteter Graph (1)

Aufgabe 8: Kurvenuntersuchung
Untersuche $f(x) = (x + 2)\cdot e^{-x}$ auf Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte sowie auf Asymptoten. Zeichne den Graphen für $2{,}5 \leq x \leq 5$.

Lösung

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|2)$ und $S_x(-2|0)$ (2)
Ableitungen: $f'(x) = -(x + 1)\cdot e^{-x}$, $f'(x) = x\cdot e^{-x}$ und $f'''(x) = (-x + 1)\cdot e^{-x}$ (2)
Asymptoten: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ positive x-Achse ist Asymptote (1)

Extrema: $H(-1|e)$ (2)

Wendpunkte: $(0|2)$ (2)
Beschrifteter Graph (1)