5.4. Prüfungsaufgaben zu Exponentialfunktionen mit Parametern

Aufgabe 1: Bestimmung einer Funktionsgleichung (4)
Bestimmen Sie die Funktion der Gestalt $(ax + b)e^x$, die die x-Achse an der Stelle x = 2 schneidet und die Gerade g(x) = 2x − 2 dort berührt.

Lösung

$f(x) = (ax + b)\cdot e^x$ mit $f(2) = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0$ und $f'(x) = (ax + a + b)\cdot e^x$ mit $f'(2) = 2 \Leftrightarrow (3a + b)\cdot e^2 = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{e^2}$

und $b = -\frac{4}{e^2} \Rightarrow f(x) = (2x - 4)\cdot e^{x-2}$.

Aufgabe 2: Symmetrie (4)

Für jedes reelle Zahl a ist eine Funktioen h_a gegeben durch $h_a(t) = \frac{1}{e^{0,5t} + e^{a-0,5t}}$ mit $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass jede Funktion h_a ein achsensymmetrisches Schaubild hat.

Lösung
Jedes Schaubild ist symmetrisch zur Achse x = a, denn
$h_a(a + t) = \frac{1}{e^{0,5(t+a)} + e^{0,5(-t+a)}} = \frac{1}{e^{0,5(-t+a)} + e^{0,5(t+a)}} = h_a(a - t)$. (4)

Aufgabe 3: Ortskurven (10)

Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $ft(x) = x + e^{-0,5x + t}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K_t.
Skizzieren Sie K_{-2}, K_0 und K_2.(2)
Nennen Sie die wichtigsten Eigenschaften der Kurven der Schar. (2)
Berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunktes T_t von K_t. (3)
Bestimmen Sie eine Gleichung der Kurve, auf der alle Tiefpunkte liegen. (1)
Für welche Werte von t hat K_t gemeinsame Punkte mit der x-Achse? (2)

Lösung
Skizzen: (2)
gemeinsame Eigenschaften: alle Schaubilder besitzen
Asymptote y = x für $x \to +\infty$ (0,5)
genau einen Tiefpunkt, der mit wachsendem t nach rechts wandert (0,5)
keinen Wendepunkt (0,5)
und sind linksgekrümmt für $x \in \mathbb{R}$. (0,5)
Ableitungen: $f_t'(x) = 1 - 0,5e^{-0,5x + t}$ und $f_t''(x) = 0,25e^{-0,5x + t}$ (1)
Tiefpunkt ($f_t'(x) = 0$ und $f_t''(x) > 0$) $T(2(t - \ln(2))|2(t - \ln(2)) + 1)$ (2)
Ortskurve y = x + 1 (1)
$f_t(x) = 0 \Leftrightarrow$ T liegt auf oder unterhalb der x-Achse $\Leftrightarrow 2(t - \ln(2)) < 0 \Leftrightarrow t < \ln(2)$ (2)

Aufgabe 4: Ortskurven (10)

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_t durch $f_t(x) = \frac{2}{e^{x+t}} + t^2$ mit $t \in \mathbb{R}$. K_t sind die Schaubilder der Schar.

Skizzieren Sie K_{-1}, K_o und K_2. (2)
Beschreiben Sie wichtigsten Eigenschaften der Schaubilder der Schar. (2)
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_t auf K_t, in dem K_t parallel zur zweiten Winkelhalbierenden y = −x verläuft. (3)
Zeichnen Sie die Ortskurve der Punkte P_t in das Koordinatensystem aus a). Zeigen Sie, dass es keine Kurve der Schar gibt, welche die erste Winkelhalbierende senkrecht schneidet. (3)

Lösung

Skizzen (2)

gemeinsame Eigenschaften: alle Schaubilder besitzen (2)

Asymptote $y = t^2$ für $x \to +\infty$

Sie sind linksgekrümmt und monoton fallesn für $x \in \mathbb{R}$

Sie entstehen aus K_0 durch Verschiebung um $-t$ in x-Richtung und um t^2 in y-Richtung.

Ableitung $f_t'(x) = -2e^{-(x+t)} = -1 \Rightarrow x = -t + \ln(2) \Rightarrow P_t(-t + \ln(2)|t^2 + 1)$ (3)

Ortskurve $y = (x + \ln(2))^2 + 1$ (1)

f_t schneidet $g(x) = -x$ senkrecht, wenn $f_t'(x) = -1 \Leftrightarrow x = -t + \ln(2)$ (siehe b) (1)

$P_t \in g \Leftrightarrow -t + \ln(2) = t^2 + 1 \Leftrightarrow t^2 + 1 - \ln(2) = 0$. Diese Gleichung hat keine Lösung. (1)

Aufgabe 5 : Tangente an Kurvenschar (5)

Für welches t schneidet die Wendetangente von $f_t(x) = x\cdot e^{tx}$ die y-Achse an der Stelle $y = -2$?

Lösung

$f_t(x) = x\cdot e^{tx}$ mit $f_t'(x) = (tx + 1)\cdot e^{tx}$ und $f_t''(x) = (t^2x + 2t)$ (2)

$\Rightarrow$ Wendepunkt $W_t(-\frac{2}{t}|-\frac{2}{te^2})$ (1)

$\Rightarrow$Wendetangente $t(x) = -x - \frac{2}{t} - \frac{2}{te^2}$. (1)

Schnittpunkt mit der y-Achse $S_y(0|-\frac{2}{t} - \frac{2}{te^2})$ mit $-\frac{2}{t} - \frac{2}{te^2} = -2$ für $t = 1 + e^{-2}$. (1)

Aufgabe 6: Ortskurve und Extremwertaufgabe (10)

a) Untersuche das Schaubild der Funktion $f_t(x) = 1 + \frac{t}{e}x - e^{tx}$ für $0 < t$ auf den Schnittpunkt mit der y-Achse, Asymptoten, Extrempunke und Wendepunkte. Skizziere das Schaubild von f_1 im Bereich $-5 \le x \le 2$.

b) Bestimme die Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte von f_t.

c) Der Hochpunkt von f_t werde mit $H_t(x_t|y_t)$ bezeichnet. Die Punkte $H_t(x_t|y_t)$, $S_t(x_t|0)$ und $O(0|0)$ bilden dann ein rechtwinkliges Dreieck. Für welches $t \in [1; 2]$ ist sein Flächeninhalt maximal?

Lösung:

a) Schnittpunkt mit der y-Achse (x = 0): $S_y(0|0)$ (0,5)

Asymptote $g_t(x) = 1 + \frac{t}{e}x$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_t'(x) = \frac{t}{e}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f_t(x) - g_t(x) = 0$ für alle $t > 0$. (1,5)

Ableitungen: $f_t'(x) = \frac{t}{e} - te^{tx}$ und $f_t''(x) = -t^2e^{tx}$ (2)

Hochpunkt ($f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$): $H(-\frac{1}{t}|1 - \frac{2}{e})$ (2)

Skizze: (1)

b) Ortskurve der Hochpunkte: mit $u = -\frac{1}{t}$ erhält man $O(u) = 1 - \frac{2}{e}$.(Parallele zur x-Achse) (1)

c) t = 1 (Randwert!) (2)

Aufgabe 7: Ortskurve (8)

a) Untersuchen Sie das Schaubild von $f_t(x) = \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{2t}{x}}$ für $t > 0$ auf Extrempunkte. Zeichnen Sie eine Schaubildskizze für $f_{0,5}$ und begründen Sie das Verhalten von f_t für $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to 0^-$ und $x \to 0^+$.

b) Berechnen Sie die Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte von f_t.

c) Berechnen Sie die beiden Integrale $A_1(s) = \int_{-1}^{s} f_t(x)dx$ für $-1 < s < 0$ und $A_2(s) = \int_{s}^{-1} f_t(x)dx$ für $s < -1$. Berechnen Sie außerdem die Grenzwerte $\lim\limits_{s\to0} A_1(s)$, und $\lim\limits_{s\to-\infty} A_2(s)$. Wie groß ist die Fläche, die durch das Schaubild von f_t und die Koordinatenachsen „eingeschlossen“ wird?

Lösung

a) $f_t'(x) = -(\frac{2t}{x^4} + \frac{2}{x^3})\cdot e^{\frac{2t}{x}} = -\frac{2}{x^4}(t + x)\ e^{\frac{2t}{x}}$ (1)

Hochpunkt ($f_t'(x) = 0$ mit VZW von + nach −) $H_t(-t|\frac{1}{t^2e^2})$ (2)

Skizze (1)

Waagrechte Asymptote $\lim_{x\to\pm\infty} f_t(x) = 0$, da $\frac{1}{x^2} \to 0$ und $e^{\frac{2t}{x}} \to 1$ für $x \to \pm\infty$. (1)

Senkrechte Asymptote von rechts, denn $\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{2t}{x}} \to \infty \cdot e^{\infty} = \infty$ für $x \to 0^+$. (0,5)

$\lim_{x\to 0-} f_t(x) = 0$, da für $x \to 0^-$ bzw. $-\frac{1}{x} \to \infty$ $f_t(x) = \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)^2}{e^{-\frac{1}{x}\cdot 2t}} \to 0$, weil die Exponentialfunktion im Nenner schneller wächst als die quadratische Funktionen im Zähler. (1,5)

b) Ortskurve der Hochpunkte $y = \frac{1}{x^2e^2}$ (1)

Aufgabe 8: Extremwertaufgabe mit Tangente und Normale (7)

Die Tangente und die Normale am Schaubild von $f_t(x) = e^{tx}$ mit $t > 0$ im Punkt $S_y(0|1)$ begrenzen mit der x-Achse ein Dreieck. Berechnen Sie den minimalen Flächeninhalt, den dieses Dreieck annehmen kann.

Lösung

$f_t(x) = e^{tx}$ mit $f_t'(x) = te^{tx}$ hat in $S_y(0|1)$ die Tangente $t(x) = tx + 1$ und die Normale $n(x) = -\frac{1}{t}x + 1$. Das von ihnen mit der x-Achse eingeschlossene Dreieck hat den Flächeninhalt $A(t) = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot(t + \frac{1}{t})\cdot 1$ mit $A'(t) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{t^2})$ mit einem Minimum bei $t = 1$ mit $A(1) = 1$ FE.

Aufgabe 9: Extremwertaufgaben mit Tangente (9)

Die Wendetangente am Schaubild von $f_t(x) = (x + t)\cdot e^{-x}$ und die Koordinatenachsen begrenzen ein Dreieck. Für welches t wird sein Flächeninhalt maximal?

Lösung

$f_t(x) = (x + t)\cdot e^{-x}$ mit $f_t'(x) = (-x - t + 1)\cdot e^{-x}$ und $f_t''(x) = (x + t - 2)\cdot e^{-x}$ (2)

⇒ Wendepunkt $W_t(2 - t|2e^{t-2})$ (1)

⇒ Wendetangente $t(x) = -e^{t-2}x + (4 - t)e^{t-2}$. (1)

⇒ Achsenschnittpunkte $S_y(0|(4 - t)e^{t-2})$ und $S_x(4 - t|0)$. (1)

⇒ Flächeninhalt $A(t) = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot(4 - t)^2e^{t-2} = \frac{1}{2}(-t^2 + 4t - 16)e^{t-2}$ mit $A'(t) = \frac{1}{2}(2t - 12)e^{t-2}$ (2)

⇒ Minimum bei $t = 6$ mit $A(6) = 2e^8$ FE. (2)