# 5.4. Prüfungsaufgaben zu Tangenten an rationalen Funktionen

**Aufgabe 1 (4)**

Gegeben ist die Funktion f mit f(x) = $\frac{x}{x+1}$.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f
b) Bestimmen Sie alle Punkte des Schaubilds von f, in denen die Tangente parallel zur Geraden mit der Gleichung y = $\frac{1}{4}$x + 3 ist.

**Lösung**

a) Skizze mit Asymptoten x = −1 und y = 1 (2)
b) $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{4}$ an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -3 \Rightarrow$ Punkte $P_1(1 \mid \frac{1}{2})$ und $P_2(-3 \mid \frac{3}{2})$ (2)

**Aufgabe 2 (4)**

An welcher Stelle im 1. Quadranten berührt die Tangente durch P(−1|0) das Schaubild von f(x) = $-\frac{1}{x}$ + 2 ? Wie weit ist der Berührpunkt von P entfernt?

**Lösung**

Ansatz $\frac{-\frac{1}{x}+2}{x+1} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) \approx 1{,}37$ mit f(1,37) ≈ 1,27 und d ≈ 2,68 (4)

**Aufgabe 3a (10)**

Welche beiden Tangenten können durch den Punkte P(0|1) an die Kurve f(x) = $\frac{1}{x-3}$ gelegt werden? Skizziere die Situation.

**Lösungen:**

Ansatz Tangentensteigung = Ableitung

$\Leftrightarrow \frac{f(x)-y_0}{x-x_0} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x-3}-1}{x-0} = -\frac{1}{(x-3)^2}$ (2)

$\Leftrightarrow \frac{1-(x-3)}{x(x-3)} = -\frac{1}{(x-3)^2} \Leftrightarrow (x-3)(-x+4) = -3$

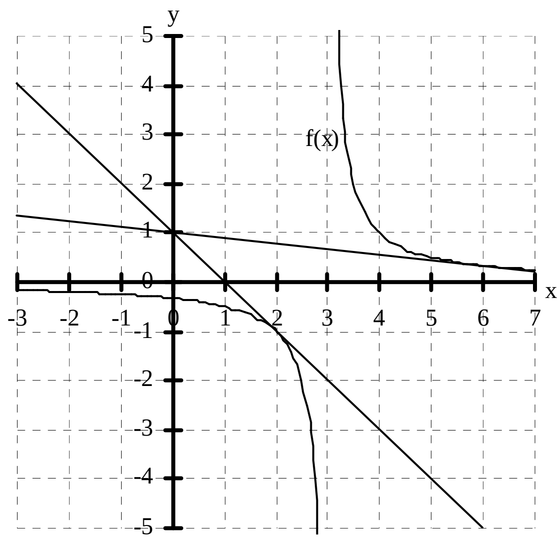
$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-6) = 0$ (2)

$\Rightarrow B_1(2|f(2)) = B_1(2|-1)$ und $B_2(6|f(6)) = B_2(6|\frac{1}{3})$. (2)

$\Rightarrow$ Steigungen $f'(2) = -1$ und $f'(6) = -\frac{1}{9}$ (1)

$\Rightarrow$ Tangenten $t_1(x) = -x + 1$ und $t_2(x) = -\frac{1}{9}x + 1$ (1)

Beschriftete Skizze (2)



**Aufgabe 3b (10)**

Welche beiden Tangenten können durch den Punkte P(−3|1) an die Kurve $f(x) = \frac{1}{x}$ gelegt werden? Skizziere die Situation.

**Lösungen:**

Ansatz Tangentensteigung = Ableitung

$\Leftrightarrow \frac{f(x)-y_0}{x-x_0} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x}-1}{x-(-3)} = -\frac{1}{x^2}$ (2)

$\Leftrightarrow \frac{1-x}{x(x+3)} = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x(1-x) = -(x+3)$

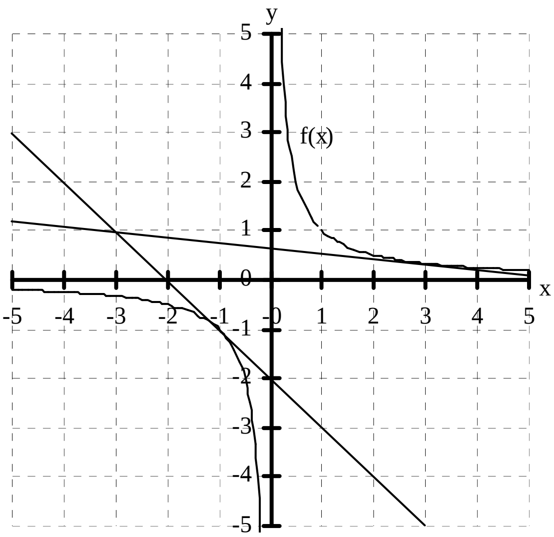
$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0$ (2)

$\Rightarrow B_1(-1|f(-1))=B_1(-1|-1)$ und $B_2(3|f(3))=B_2(3|\frac{1}{3})$. (2)

$\Rightarrow$ Steigungen $f'(-1) = -1$ und $f'(3) = -\frac{1}{9}$ (1)

$\Rightarrow$ Tangenten $t_1(x) = -x - 2$ und $t_2(x) = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$ (1)

Beschriftete Skizze (2)




**Aufgabe 4 (25)**

a) Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{x^2+3x}{2x-2}$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten sowie Extrempunkte und skizziere ihren Graphen mit allen wesentlichen Punkten und Asymptoten.

b) Berechne die Gleichung der Tangente, die durch $P(1|-\frac{3}{2})$ an den Graphen von f gelegt werden kann und zeichne sie in das Koordinatensystem aus a) ein.

**Lösungen**

a) $f(x) = \frac{x(x+3)}{2(x-1)} \Rightarrow D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ und senkrechte Asymptote bei x = 1, da NST nur im Nenner (2)

$S_y(0|0) = S_{x1}$ und $S_{x2}(-3|0)$, da NST nur im Zähler. (2)

$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 + \frac{2}{x-1}$ (Polynomdivision) (1)

Schiefe Asymptote $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$, da $\lim\limits_{x\to\pm\infty}((f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x-1} = 0$ (3)

Ableitungen: $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{2(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{2(x-1)^2}$ und $f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$ (Quotientenregel) (2)

Hochpunkt $H(-1|\frac{1}{2})$, da $f'(-1) = 0$ und $f''(-1) = -\frac{1}{2} < 0$ oder Argumentation mit VZW von f' (3)

Tiefpunkt $H(3|\frac{9}{2})$, da $f'(3) = 0$ und $f''(3) = 4 > 0$ oder Argumentation mit VZW von f' (3)

Beschriftete Skizze mit allen berechneten Punkten und Asymptoten (3)

b) Tangente an $P(1|-\frac{3}{2})$: Steigungsdreieck $\frac{f(x)-y_0}{x-x_0} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{\frac{x^2+3x}{2x-2}-\left(-\frac{3}{2}\right)}{x-1} = \frac{x^2-2x-3}{2(x-1)^2}$ (2)

$\Leftrightarrow \frac{x^2+3x+(3x-3)}{2(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{2(x-1)^2} \Leftrightarrow x^2 + 6x - 3 = x^2 - 2x - 3 \Leftrightarrow 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (2)

$\Rightarrow$ Berührpunkt B(0|0) und $f'(0) = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ Tangentengleichung $t(x) = -\frac{3}{2}x$. (1)

Skizze (1)