5.4. Ableitungsregeln

5.4.1. Die Substitutionsmethode (Kettenregel)

Satz: Substitutionsmethode oder Kettenregel
Die Ableitung von f(x) = **g(**z(x)**)** ist f'(x) = z'(x)·**g'(**z(x)**)**
z'(x) heißt auch **innere Ableitung**
g'(z(x)**)** heißt auch **äußere Ableitung**
Beweis: Wegen der Stetigkeit von z(x) gilt $\lim\limits_{\Delta x \to 0} z(x + \Delta x) = z(x)$ bzw. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta z = 0$ mit $\Delta z := z(x + \Delta x) - z(x)$ und damit

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(z(x+\Delta x)) - g(z(x))}{\Delta x} \\
&= \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(z(x+\Delta x)) - g(z(x))}{z(x+\Delta x) - z(x)} \cdot \frac{z(x+\Delta x) - z(x)}{\Delta x} \right) \\
&= \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z} \cdot \frac{z(x+\Delta x) - z(x)}{\Delta x} \right) \\
&= g'(z(x)) \cdot z'(x)
\end{aligned}
$$

Beispiel 1:
Berechne die Ableitung von $f(x) = (x^2 + 2)^5$.
Lösung:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathbf{g(}z(x)\mathbf{)} &\Rightarrow f'(x) &= z'(x)\cdot \mathbf{g'(}z(x)\mathbf{)} \\
f(x) &= \mathbf{(}x^2 + 2\mathbf{)^5} &\Rightarrow f'(x) &= 2x\cdot\mathbf{5(}x^2 + 2\mathbf{)^4} \\
& & &= 10x(x^2 + 2)^4
\end{aligned}
$$

Beispiel 2:
Berechne die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$
Lösung:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathbf{g(}z(x)\mathbf{)} &\Rightarrow f'(x) &= z'(x)\cdot \mathbf{g'(}z(x)\mathbf{)} \\
f(x) &= \mathbf{(}x^2 + 5\mathbf{)^{0,5}} &\Rightarrow f'(x) &= 2x\cdot\mathbf{0,5\cdot(}x^2 + 5\mathbf{)^{-0,5}} \\
& & &= \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}
\end{aligned}
$$

Beispiel 3:
Berechne die Ableitung von $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5}$.
Lösung:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathbf{g(}z(x)\mathbf{)} &\Rightarrow f'(x) &= z'(x)\cdot \mathbf{g'(}z(x)\mathbf{)} \\
f(x) &= \mathbf{(}x^2 + 2\mathbf{)^{-1}} &\Rightarrow f'(x) &= 2x\cdot\mathbf{(-1)\cdot(}x^2 + 2\mathbf{)^{-2}} \\
& & &= -\frac{2x}{(x^2+5)^2}
\end{aligned}
$$

Beispiel 4:
Berechne die Ableitung von $f(x) = \sin(x^2 + 5)$
Lösung:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathbf{g(}z(x)\mathbf{)} &\Rightarrow f'(x) &= z'(x)\cdot \mathbf{g'(}z(x)\mathbf{)} \\
f(x) &= \mathbf{\sin(}x^2 + 5\mathbf{)} &\Rightarrow f'(x) &= 2x\cdot\mathbf{\cos(}x^2 + 5\mathbf{)}
\end{aligned}
$$

Substitutionsmethode in Differentialschreibweise
Die **Diffentialschreibweise** ist vor allem in der Physik verbreitet und ermöglicht eine vereinfachte und verkürzte Darstellung der Differentialrechnung. Man schreibt $\xi - x \to dx$ und $f(\xi) - f(x) \to df$ jeweils für $\xi \to x$ so dass $\dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \to \dfrac{df}{dx} = f'(x)$ Die Substitutionsmethode schreibt sich dann in der folgenden einprägsamen Gestalt: $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx}$. Besonders nützlich ist diese Schreibweise bei der Anwendung der Substitutionsmethode in der Integration (siehe 5.1.)

Übungen: *Aufgaben zu Ableitungsregeln Nr. 1 und 2*

5.4.2. Die natürliche Exponentialfunktion (siehe auch 4.7.1.)

Definition und Satz über die natürliche Exponentialfunktion
Die einzige Funktion, deren Steigung an jeder Stelle genau dem Funktionswert entspricht, ist die **natürliche Exponentialfunktion** $\exp(x) = e^x$ mit der **Eulerschen Zahl** $e = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sqrt[\Delta x]{1+\Delta x} = 2{,}71828....$ Ihre Umkehrung ist die **natürliche Logarithmusfunktion** $\ln(x) = \log_e(x)$.
Beweis: Wenn $(e^x)' = e^x$ gelten soll, **dann** muss für $\Delta x \to 0$ auch gelten

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1 \Leftrightarrow e^{\Delta x} - 1 \to \Delta x \Leftrightarrow e^{\Delta x} \to 1 + \Delta x \Leftrightarrow \sqrt[\Delta x]{1+\Delta x} \to e \text{ für } \Delta x \to 0.$$

Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion
Eine Exponentialfunktion $y = a^x$ mit beliebiger Basis $a > 0$ und $a \neq 1$ lässt sich mit Hilfe des Logarithmus auf die natürliche Exponentialfunktion zurückführen: $a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{x\cdot\ln(a)}$.
Die Ableitung ergibt sich dann mit Hilfe der **Substitutionsmethode**: $(a^x)' = \ln(a)\cdot e^{x\cdot\ln a} = \ln(a)\cdot e^x$

Beispiel: $f(x) = \mathbf{g(}z(x)\mathbf{)} = \mathbf{e}^{x^2+5} \Rightarrow f'(x) = z'(x)\cdot\mathbf{g'(}z(x)\mathbf{)} = 2x\cdot \mathbf{e}^{x^2+5}$

Übungen: *Aufgaben zu Ableitungsregeln Nr. 3*

5.4.3. Die Produktregel

Bei der Ableitung von **Summen** oder **konstanten Faktoren** gelten einfache Regeln: Summen werden getrennt abgeleitet; konstante Faktoren bleiben sogar unverändert. Leider ist die Ableitung von **Produkten** etwas komplizierter:

Satz: Produktregel
Für $f(x) = g(x)\cdot h(x)$ ist $f'(x) = g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x)$. **Kurzschreibweise**: $(gh)' = g'h + gh'$
Beweis

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x+\Delta x) - g(x)\cdot h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x+\Delta x) - g(x)\cdot h(x+\Delta x) + g(x)\cdot h(x+\Delta x) - g(x)\cdot h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[g(x+\Delta x) - g(x)]\cdot h(x+\Delta x) + g(x)\cdot[h(x+\Delta x) - h(x_0)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\cdot h(x+\Delta x) + g(x)\cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x) \end{aligned}$$

Beispiel 1:
Berechne die Ableitung von $f(x) = (x^2 + 2)\cdot\sin x$
Lösung:

$f(x) = \mathbf{g(x)}\cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = \mathbf{g'(x)}\cdot h(x) + \mathbf{g(x)}\cdot h'(x)$

$f(x) = \mathbf{(x^2 + 2)}\cdot\sin x \Rightarrow f'(x) = \mathbf{2x}\cdot\sin x + \mathbf{(x^2 + 2)}\cdot\cos x$

Beispiel 2:
Berechne die Ableitung von $f(x) = (x^2 + 5)\cdot e^x$
Lösung:

$f(x) = \mathbf{g(x)}\cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = \mathbf{g'(x)}\cdot h(x) + \mathbf{g(x)}\cdot h'(x)$

$f(x) = \mathbf{(x^2 + 2)}\cdot e^x \Rightarrow f'(x) = \mathbf{2x}\cdot e^x + \mathbf{(x^2 + 2)}\cdot e^x = (x^2 + 2x + 2)\cdot e^x$

Beispiel 3:
Berechne die Ableitung von $f(x) = (2x + 2)\cdot\sqrt{x}$
Lösung:

$f(x) = \mathbf{g(x)}\cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = \mathbf{g'(x)}\cdot h(x) + \mathbf{g(x)}\cdot h'(x)$

$f(x) = \mathbf{(x^2 + 2)}\cdot\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \mathbf{2x}\sqrt{x} + \mathbf{(x^2+2)}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{3}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

Beispiel 4:
Berechne die Ableitung von $f(x) = (x + 1)\cdot e^{x^2+5}$
Lösung:

$f(x) = \mathbf{g(x)}\cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = \mathbf{g'(x)}\cdot h(x) + \mathbf{g(x)}\cdot h'(x)$

$f(x) = \mathbf{(x + 1)}\cdot e^{x^2+5} \Rightarrow f'(x) = \mathbf{1}\, e^{x^2+5} + \mathbf{(x + 1)}\cdot 2x\, e^{x^2+5} = (2x^2 + 2x + 1)\cdot e^{x^2+5}$

Übungen: Aufgaben zu Ableitungsregeln Nr. 4 und 5

5.4.4. Die natürliche Logarithmusfunktion (siehe auch 4.7.2.)

Satz zur Ableitung von Umkehrfunktionen

Für die Funktion y = f(x) mit der Ableitung f'(x) und der Umkehrung x = $f^{-1}(y)$ ist $[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Beweis: Wie beim Beweis der Kettenregel in 5.4.1 nutzt man
die Stetigkeit von f(x) in der Form $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$ bzw. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$ mit $\Delta y := f(x + \Delta x) - f(x)$ sowie
die Stetigkeit von $f^{-1}(y)$ in der Form $\lim\limits_{\Delta y\to 0} f^{-1}(y + \Delta y) = f^{-1}(y)$ bzw. $\lim\limits_{\Delta y\to 0} \Delta x = 0$ mit $\Delta x := f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$
und erhält

$$[f^{-1}(y)]' = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion

Mit $f(x) = f'(x) = e^x$ und $f^{-1}(y) = \ln(y)$ erhält man aus dem obigen Satz $\ln'(y) = = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f(f^{-1}(y))} = \frac{1}{y}$.

Ableitung der allgemeinen Logarithmusfunktionen

Bei der **Logarithmusfunktion** ergibt sich der Übergang zu einer anderen Basis a durch (nachgeschaltete) Multiplikation des Funktionswertes mit dem Faktor $\frac{1}{\ln(a)}$: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. Der Faktor bleibt bei der Ableitung einfach stehen: $\log_a'(x) = \frac{1}{x\cdot\ln(a)}$.

Beispiel: f(x) = **g(**z(x)**)** = **ln(**x^2 + 5**)** ⇒ f'(x) = z'(x)·**g'(**z(x)**)** = $2x\cdot\frac{1}{x^2+5}$

Übungen: Aufgaben zu Ableitungsregeln Nr. 6

5.4.5. Die Quotientenregel

Satz: Quotientenregel

Für $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ mit $h(x) \neq 0$ ist $f'(x) = \frac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{(h(x))^2}$ **Kurzschreibweise**: $(\frac{g}{h})' = \frac{g'h - gh'}{h^2}$

Beweis

Man schreibt den Quotienten als Produkt $f(x) = g(x)\cdot\frac{1}{h(x)}$ und verwendet die **Produktregel** und die **Kettenregel:**

$$f'(x) = g'(x)\cdot\frac{1}{h(x)} + g(x)\cdot\left(\frac{1}{h(x)}\right)' = g'(x)\cdot\frac{1}{h(x)} + g(x)\cdot\left(-\frac{h(x)}{(h(x))^2}\right) = \frac{g'(x)}{h(x)} - \frac{g(x)\cdot h'(x)}{(h(x))^2} = \frac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{(h(x))^2}$$

Beispiel:

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \frac{x^2+5}{3x-1}$

Lösung:

$f(x) = \frac{\mathbf{g(x)}}{h(x)} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{\mathbf{g'(x)}\cdot h(x) - \mathbf{g(x)}\cdot h'(x)}{(h(x))^2}$

$f(x) = \frac{\mathbf{x^2+5}}{3x-1} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{\mathbf{2x}\cdot(3x-1) - \mathbf{(x^2+5)}\cdot 3}{(3x-1)^2} = \frac{3x^2-17x-15}{9x^2-6x+1}$

Übungen: Aufgaben zu Ableitungsregeln Nr. 7 – 11
Aufgaben zur Kurvendiskussion zusammengesetzter Funktionen Nr. 1 - 9