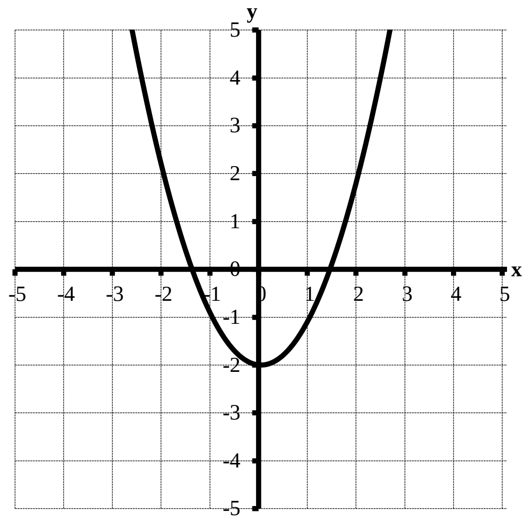
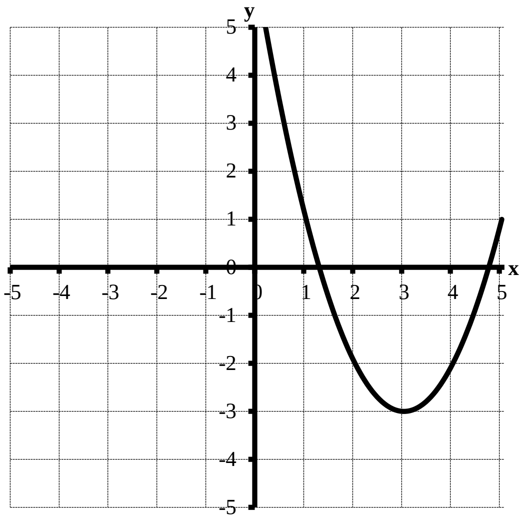
5.5. Aufgaben zur graphischen Integration

Aufgabe 1
Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f. Skizzieren Sie die Schaubilder der Ableitungsfunktion f' und einer Stammfunktion F in das gegeben Koordinatensystem und nehmen Sie zu den folgenden Aussagen **begründet** Stellung:

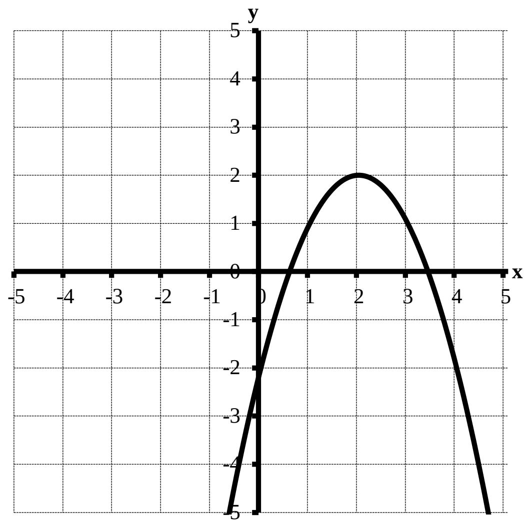


a) f' besitzt im Intervall [−2; 2] genau eine Nullstelle.
b) f' ist im Intervall [−2; 2] monoton fallend.
c) F besitzt im Intervall [−2; 2] genau drei Nullstellen.
d) F ist im Intervall [−2; 2] monoton fallend.
e) F besitzt im Intervall [−2; 2] Extremstellen.



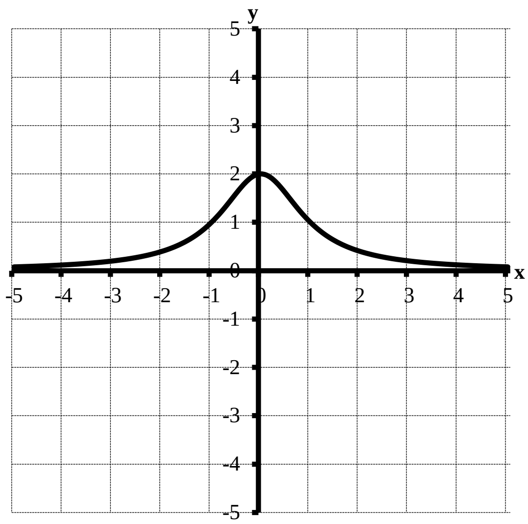
Aufgabe 2
Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f. Skizzieren Sie die Schaubilder der Ableitungsfunktion f' und der Integralfunktion I_0 in das gegeben Koordinatensystem und nehmen Sie zu den folgenden Aussagen **begründet** Stellung:

a) f' besitzt im Intervall [0; 5] genau eine Nullstelle.
b) I_0 ist im Intervall [2; 4] monoton fallend
c) I_0 besitzt im Intervall [0; 5] genau drei Nullstellen.
d) I_0 besitzt im Intervall [0; 5] genau 2 Extremstellen.



Aufgabe 3
Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f. Skizzieren Sie die Schaubilder der Ableitungsfunktion f' und der Integralfunktion I_0 in das gegeben Koordinatensystem und nehmen Sie zu den folgenden Aussagen **begründet** Stellung:

a) I_0 besitzt im Intervall [0; 5] genau drei Nullstellen.
b) I_0 ist im Intervall [2; 4] monoton steigend.
c) I_0 besitzt im Intervall [0; 5] genau zwei Extremstellen.
d) f' ist im Intervall [0; 5] monoton fallend.



Aufgabe 4
Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f. Skizzieren Sie die Schaubilder der Ableitungsfunktion f' und der Integralfunktion I_0 in das gegeben Koordinatensystem und nehmen Sie zu den folgenden Aussagen **begründet** Stellung:

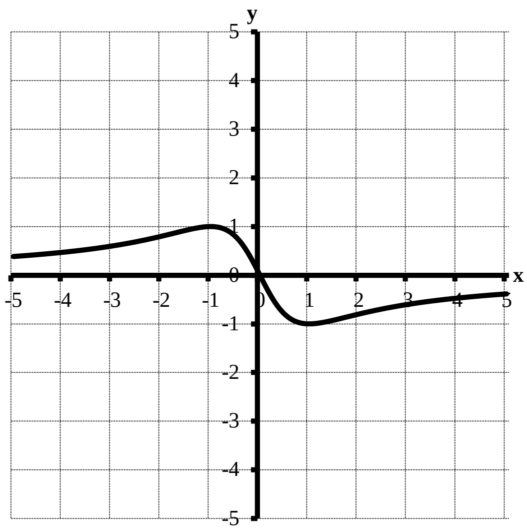
a) I_0 besitzt im Intervall [−5;5] genau zwei Nullstellen.
b) I_0 besitzt im Intervall [−5;5] zwei Extremstellen.
c) I_0 ist symmetrisch zum Ursprung
d) f' ist im Intervall [−5;5] monoton fallend.
e) f' ist symmetrisch zur y-Achse.

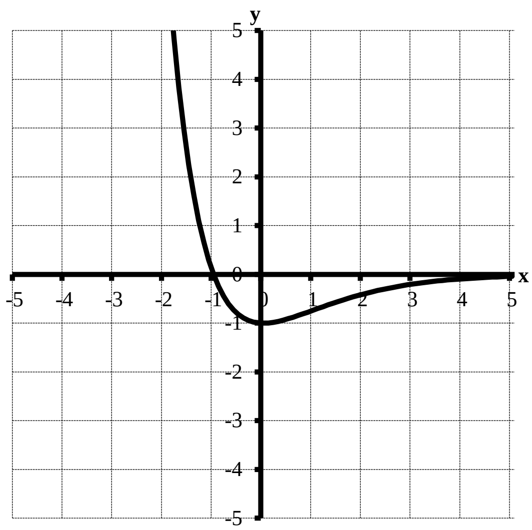
Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung für f an.

Aufgabe 5
Gegeben ist das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion f und in das gegeben Koordinatensystem und nehmen Sie zu den folgenden Aussagen **begründet** Stellung:

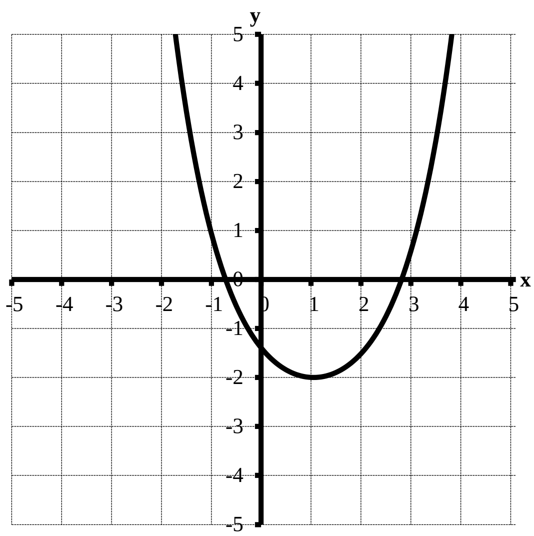
a) Das Schaubild von f ist achsensymmetrisch.
b) Das Schaubild von f hat zwei Nullstellen.
c) Das Schaubild von f hat bei x = 0 einen Tiefpunkt.
d) Das Schaubild von f hat zwei Extrempunkte.

Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung für f an.

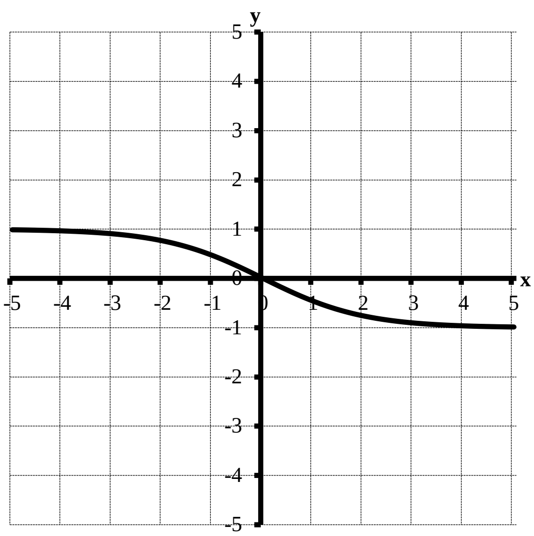




Aufgabe 6
Gegeben ist das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion f und in das gegeben Koordinatensystem und nehmen Sie zu den folgenden Aussagen **begründet** Stellung:
a) $f(x) > 0$ für $x > -1$.
b) Das Schaubild von f hat bei $x = -1$ eine waagrechte Tangente.
c) Das Schaubild von f hat bei x = 0 einen Tiefpunkt.
d) Das Schaubild von f hat keine Wendepunkte.
Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung für f an.



Aufgabe 7
Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f. Skizzieren Sie die Schaubilder der Ableitungsfunktion f' und der Integralfunktion I_0 in das gegeben Koordinatensystem und nehmen Sie zu den folgenden Aussagen **begründet** Stellung:
a) f' besitzt im Intervall $[-2; 4]$ genau eine Nullstelle.
b) f' besitzt im Intervall $[-2; 4]$ einen Wendepunkt.
c) I_0 ist im Intervall $[0; 2]$ monoton fallend
d) I_0 besitzt im Intervall $[-2; 4]$ genau drei Nullstellen.
e) I_0 besitzt im Intervall $[-2; 4]$ genau 2 Extremstellen.
Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung für f an.
Es handelt sich **nicht** um eine ganzrationale Funktion!



Aufgabe 8
Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f. Skizzieren Sie die Schaubilder der Ableitungsfunktion f' und der Integralfunktion I_0 in das gegeben Koordinatensystem und nehmen Sie zu den folgenden Aussagen **begründet** Stellung:

a) f' ist achsensymmetrisch.
b) f' besitzt im Intervall $[-5; 5]$ einen Wendepunkt.
c) I_0 ist im Intervall $[-5; 5]$ monoton steigend
d) I_0 ist punktsymmetrisch

Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung für f an.
Es handelt sich **nicht** um eine ganzrationale Funktion!

5.5. Lösungen zu den Aufgaben zur graphischen Integration

Allgemeine Hinweise: Bei den Aufgaben zur graphischen Integration und Differentiation soll der Verlauf der Steigungsfunktion und der Flächeninhaltsfunktion aus dem **Schaubild** von f hergeleitet werden. Die exakte Berechnung der Ableitung und der Integralfunktion aus der **Funktionsgleichung** wird **nicht verlangt** und ist mitschulischen Mitteln auch nicht immer möglich! Dementsprechend habe ich die Lösungen **ohne** Blick auf die Funktionsgleichung formuliert: Nicht das exakte Ergebnis zählt, sondern die **Begründung**! Zur Überprüfung habe ich jeweils die Gleichung der Ausgangsfunktion angegeben. Mit dem TI 83 lassen sich daraus die Schaubilder der Ableitung und der Flächeninhaltsfunktion mittels der Befehle MATH 8:nDeriv und MATH 9:fnInt zeichnen: Eingabe z.B. für Aufgabe 1: Y_1 = X^2 − 2, Y_2 = nDeriv(Y_1, X, X) und Y_3 = fnInt(Y_1, X, 0, X).

Aufgabe 1

$f(x) = x^2 - 2$

a) stimmt, weil f nur bei x = 0 eine waagrechte Tangente hat
b) stimmt nicht, im Gegenteil nimmt die Steigung ständig zu, f' ist auf [−2; 2] monoton steigend!
c) stimmt nicht: Da die Lage von F im Koordinatensystem nicht festgelegt ist, kann man auch keine genaue Aussage über die Nullstellen machen.
d) stimmt nicht: Da Flächen unterhalb der x-Achse negativ gezählt werden, nimmt F genau dann ab, wenn $f(x) < 0$, d.h. in diesem Falle nur zwischen den beiden Nullstellen, die aber deutlich innerhalb des Intervalls liegen.
e) stimmt: Die beiden Nullstellen mit VZW von f haben Extremstellen von F zur Folge.

Aufgabe 2

$f(x) = (x - 3)^2 - 3$

a) stimmt, weil f nur bei x = 3 eine waagrechte Tangente hat
b) stimmt, da Flächen unterhalb der x-Achse negativ gezählt werden.
c) stimmt nicht. Eine Nullstelle ist bei x = 0, da trivialerweise $I_0(0) = 0$ ist. Dann steigt I_0 bis zur Nullstelle von f bei $x \approx 1{,}2$ auf den Maximalwert ca. 3,5 (Kästchen oberhalb der x-Achse abzählen!) und fällt im Bereich negativer Flächen wieder. Zwischen x = 3 und x = 4 wird wieder der Wert 0 erreicht (3,5 Kästchen unterhalb der x-Achse abzählen!) Danach sinkt I_0 weiter ab auf den Minimalwert von ca. −2,5 (Kästchen abschätzen!) bei der zweiten Nullstelle von f bei $x \approx 4{,}8$. Bis x = 5 liegt nur noch ca. 0,1 Kästchen oberhalb der x-Achse, so dass der Wert 0 auf keinen Fall bis dorthin erreicht werden kann.
d) stimmt: Die beiden Nullstellen mit VZW bei $x \approx 1{,}2$ und $x \approx 4{,}8$ von f haben Extremstellen von F zur Folge.

Aufgabe 3

$f(x) = -(x - 2)^2 + 2$

a) stimmt: Zunächst ist $I_0(0) = 0$. I_0 sinkt dann bis zur Nullstelle von f bei $x \approx 0{,}6$ auf den Minimalwert ca. −0,5 (Kästchen unterhalb der x-Achse), steigt dann und passiert die x-Achse bei $x \approx 1{,}2$ (0,5 Kästchen oberhalb der x-Achse abschätzen). Der Maximalwert von ca. 3,5 (Kästchen oberhalb der x-Achse) wird bei der nächsten Nullstelle von f bei $x \approx 3{,}4$ erreicht. Bis x = 5 fällt I_0 um deutlich mehr als 4 Flächeneinheiten (Kästchen unterhalb der x-Achse), d.h., es passiert die x-Achse ein drittes Mal!
b) stimmt nicht, denn I_0 steigt nur dort, wo $f(x) > 0$, d.h. zwischen den Nullstellen bei $x \approx 0{,}6$ und $x \approx 3{,}4$.
c) stimmt: Die beiden Nullstellen mit VZW bei $x \approx 0{,}6$ und $x \approx 3{,}4$ von f haben Extremstellen von I_0 zur Folge.
d) stimmt: die Steigung nimmt im gesamtem Bereich ständig ab.

Aufgabe 4

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

a) stimmt nicht: Da $f(x) > 0$ im gesamtem Bereich, ist I_0 monoton steigend und passiert die x-Achse nur einmal bei x = 0.
b) stimmt nicht, denn f hat auf dem gesamtem Intervall keinen VZW
c) stimmt: $I_0(-x) = -I_0(x)$, denn die Flächen $|I_0(x)|$ rechts und links $|I_0(-x)|$ von der y-Achse sind gleich und außerdem ist $I_0(0) = 0$.
d) stimmt nicht: die Steigung nimmt bis zum Wendepunkt bei $x \approx -1$ zu, dann bis zum nächsten Wendepunkt bei $x \approx 1$ wieder ab und dann wieder zu.
e) stimmt nicht wegen d). f' ist aber symmetrisch zum Ursprung!

Aufgabe 5

$f'(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$

a) stimmt, denn die Änderungsraten f' im gleichen Abstand rechts und links von der y-Achse unterscheiden sich nur im Vorzeichen: $f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow$ Abnahme links = Zunahme rechts

b) keine Aussage möglich, denn die Lage der Stammfunktion f im Koordinatensystem ist nicht festgelegt

c) stimmt nicht, denn die Steigung f' hat bei x = 0 VZW von + (steigend) nach − (fallend), d.h., es liegt ein Hochpunkt vor.

d) stimmt nicht: Abgesehen von dem Hochpunkt bei x = 0 gibt keine weitere Stelle mit waagrechter Tangente.

Aufgabe 6

$f'(x) = -(x+1)\cdot e^{-x}$

a) keine Aussage möglich, denn die Lage der Stammfunktion f im Koordinatensystem ist nicht festgelegt

b) stimmt, denn die Steigung $f'(-1) = 0$

c) stimmt nicht, denn die Steigung f' hat bei x = 0 ein Minimum, d.h., f hat dort maximales Gefälle, d.h., es liegt ein Wendepunkt vor.

d) stimmt nicht: siehe c)

Aufgabe 7

$f(x) = \frac{1}{2}(e^{(x-1)} + e^{-(x-1)}) - 3$. Das Schaubild entsteht durch Verschiebung der „Exponentialparabel“ $y = e^x + e^{-x}$ um $x_0 = 1$ nach rechts und $y_0 = -3$ nach unten sowie Stauchung um den Faktor $\frac{1}{2}$.

a) stimmt, denn nur bei x = 1 liegt eine waagrechte Tangente vor.

b) stimmt, denn die Krümmung f'' erreicht in [−2; 4] offensichtlich ihr Maximum (entweder ein Maximum genau bei x = 1 oder vielleicht auch zwei Maxima links und rechts von x = 1). Ein Maximum von f'' bedeutet aber maximale Zunahme von f', d.h. einen Wendepunkt von f'.

c) stimmt, da Flächen unterhalb der x-Achse negativ gezählt werden

d) stimmt nicht, denn von $I_0(0) = 0$ aus nimmt I_0 zunächst ab bis auf den Minimalwert von ca. 4,5 FE bei $x \approx 2{,}8$ und nimmt bis x = 4 um ca. 3 FE zu, d.h., die x-Achse wird erst jenseits von x = 4 wieder erreicht.

e) stimmt, denn die Steigung $I_0'(x) = f(x)$ hat zwei Nullstellen bei $x \approx -0{,}8$ und $x \approx 2{,}8$.

Aufgabe 8

$f(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$

a) stimmt, denn die Steigungen sind rechts und links im gleichen Abstand von der y-Achse gleich: $f'(-x) = f'(x)$.

b) stimmt, denn die Krümmung f'' erreicht bei $x \approx \pm 0{,}5$ ihr Maximum bzw. Minimum. Ein Maximum bzw. Minimum von f'' bedeutet aber maximale Zu- bzw. Abnahme von f', d.h. einen Wendepunkt von f'.

c) stimmt nicht, da Flächen unterhalb der x-Achse negativ gezählt werden, d.h. I_0 ist für x < 0 monoton steigend aber für x > 0 monoton fallend

d) stimmt nicht, I_0 ist aber achsensymmetrisch, denn die Flächen sind rechts und links im gleichen Abstand von der y-Achse gleich: $I_0(-x) = I_0(x)$