5.5. Abstrakte Abituraufgaben zu Exponentialfunktionen

Aufgabe 1: Kurvenuntersuchung, Integration, Optimierungsaufgabe

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x - 2)\cdot e^{0,5x}$.

a) Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte sowie auf Asymptoten. Zeichnen Sie ein Schaubild für $-5 \leq x \leq 3$. (14)

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch das Schaubild von f und die beiden Koordinatenachsen eingeschlossen wird. (6)

c) Die Senkrechte x = u mit u < 0 schneidet die x Achse im Punkt P und das Schaubild von f im Punkt Q. Für welches u wird der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ maximal? (6)

Lösung
Teil a)

Achsenschnittpunkte: $S_y(0|-2)$ und $S_x(2|0)$ (2)

Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{2}x\cdot e^{0,5x}$, $f''(x) = (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2})\cdot e^{0,5x}$ und $f'''(x) = (\frac{1}{8}x + \frac{1}{2})\cdot e^{0,5x}$ (2)

Asymptoten: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ negative x-Achse ist Asymptote (1)

Extrema: $T(0|-2)$ (2)

Wendpunkte: $(-2|-\frac{4}{e})$ (2)

Schaubild (1)

Teil b)

$A = \left|\int_0^2 (x-2)\cdot e^{0,5x}dx\right| = \left|\left[(x-2)\cdot 2\cdot e^{0,5x}\right]_0^2 - \int_0^2 2\cdot e^{0,5x}dx\right| = \left|\left[(x-2)\cdot 2\cdot e^{0,5x}\right]_0^2 - \left[4\cdot e^{0,5x}\right]_0^2\right| = 4e - 8 \approx 2,87$ FE

Teil c)

$A(u) = \frac{1}{2}\cdot(0 - u)\cdot((f(u) - 0) = (u - \frac{1}{2}u^2)\cdot e^{0,5u}$ mit $A'(u) = (1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}u^2)e^{0,5u}$ und $A''(u) = -(\frac{3}{4}u + \frac{1}{8}u^2)e^{0,5u} \Rightarrow$ rel. und abs. Maximum bei $u = -1 - \sqrt{5}$.

Aufgabe 2: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Integration, Optimierungsaufgabe

Für jedes positive reelle t ist die Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = x + e^{t-x}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild heißt K_t.

a) Untersuchen Sie K_2 auf den Schnittpunkt mit der y-Achse, Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie auf Asymptoten. Zeigen Sie, dass es keinen Schnittpunkt mit der x-Achse gibt. Zeichnen Sie K_2 im Bereich $-0,5 \leq x \leq 5$ mit 1 LE = 1cm. (12)

b) Untersuche Sie, für welchen Wert von $t \in \mathbb{R}$ das Schaubild K_t die x-Achse berührt. (6)

c) Zeigen Sie, dass F_t mit $F_t(x) = 0,5x^2 - e^{t-x}$ mit $x \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f_t ist. Das Schaubild K_2, die y-Achse, die 1. Winkelhalbierende und die Gerade mit der Gleichung x = u mit u > 0 schließen eine Fläche mit dem Inhalt A(u) ein. Berechnen Sie A(u). (5)

d) Die Gerade mit der Gleichung x = a (a > 0) schneidet das Schaubild K_2 im Punkt Q und die 1. Winkelhalbierende im Punkt P. Der Ursprung O sowie die Punkte P und Q sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie a so, das der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ ein relatives Maximum annimmt. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. (7)

Lösung
Teil a)

Ableitungen: $f_2'(x) = 1 - e^{2-x}$, $f_2''(x) = e^{2-x}$, $f_2'''(x) = -e^{2-x}$ (3)

Schnittpunkte mit der y-Achse (x = 0): $N(0|e^2)$ (1)

Asymptote g(x) = x, da $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 1$ und $\lim\limits_{x\to\infty}$ f(x)-1 = 0 (1)

Tiefpunkt (f'(x) = 0 und f''(x) > 0): T(2|3) (3)

keine Wendepunkte, da f''(x) > 0 für $x \in \mathbb{R}$ (1)

kein Schnittpunkt mit der x-Achse, $y_{TP} = 3 > 0$ und kein WP. (1)

Wertetabelle und Schaubild (2)

Teil b)

Ableitungen: $f_t(x) = x + e^{t-x}$, $f_t'(x) = 1 - e^{t-x}$ und $f_t''(x) = e^{t-x}$ (2)

Tiefpunkt: ($f'_t(x)=0$ und $f_t''(x)>0$) T(t|t+1) (3)

T liegt auf der x-Achse, falls t+1 = 0 ⇒ t = −1. (1)

Teil c)

Stammfunktion: $F_t'(x) = f_t(x)$ (2)

Flächenberechnung: $A(u) = F(u) - F(0) = e^2(1-e^{-u})$. (3)

Teil d)

$A(a) = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\ f_2(a)-a = \frac{1}{2}\cdot a\cdot e^{2-a}$ mit a > 0 .(3)

⇒ $A'(a) = \frac{1}{2}\cdot(1-a)\cdot e^{2-a}$ und $A''(a) = \frac{1}{2}\cdot(a-2)\cdot e^{2-a}$ (2)

rel. Max bei a = 1. Randwerte $A(0) = \lim\limits_{a\to\infty} A(a) = 0$ ⇒ abs. Max bei A = 1 mit $A(1) = \frac{1}{2}e$. (3)

Aufgabe 3: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Integration, Optimierungsaufgabe

Für jedes positive reelle t ist die Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = e^{t+x} - x$ mit x ϵ ℝ. Ihr Schaubild heißt K_t.

a) Untersuchen Sie K_2 auf den Schnittpunkt mit der y-Achse, Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie auf Asymptoten. Zeigen Sie, dass es keinen Schnittpunkt mit der x-Achse gibt. Zeichnen Sie K_2 im Bereich $-5 \leq x \leq 0{,}5$ mit 1 LE = 1cm. (12)

b) Untersuchen Sie, für welchen Wert von t ϵ ℝ das Schaubild K_t die x-Achse berührt. (6)

c) Zeigen Sie, dass F_t mit $F_t(x) = e^{t+x} - 0{,}5x^2$ mit x ϵ ℝ eine Stammfunktion von f_t ist. Das Schaubild K_2, die y-Achse, die Gerade y = −x und die Senkrechte x = −u mit u > 0 schließen eine Fläche mit dem Inhalt A(u) ein. Berechnen Sie A(u). (5)

d) Die Gerade mit der Gleichung x = −a (a > 0) schneidet das Schaubild K_2 im Punkt Q und die Gerade y = −x im Punkt P. Der Ursprung O sowie die Punkte P und Q sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie a so, das der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ ein relatives Maximum annimmt. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. (7)

Lösung

Teil a)

Ableitungen: $f_2(x) = e^{2+x} - x$, $f_2'(x) = e^{2+x} - 1$, $f_2''(x) = e^{2+x}$ und $f_2'''(x) = e^{2+x}$ (3)

Schnittpunkte mit der y-Achse (x = 0): $N(0|e^2)$ (1)

Asymptote g(x) = −x, da $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = -1$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)+x = 0$ (1)

Tiefpunkt (f'(x) = 0 und f''(x) > 0): T(−2|3) (3)

keine Wendepunkte, da f''(x) > 0 für x ϵ ℝ (1)

kein Schnittpunkt mit der x-Achse, $y_{TP} = 3 > 0$ und kein Wendepunkt. (1)

Wertetabelle und Schaubild: (2)

Teil b)

Ableitungen: $f_t(x) = e^{t+x} - x$, $f_t'(x) = e^{t+x} - 1$ und $f_t''(x) = e^{t+x}$ (2)

Tiefpunkt: ($f'_t(x)=0$ und $f_t''(x)>0$) T(−t|t+1) (3)

T liegt auf der x-Achse, falls t + 1 = 0 ⇒ t = −1. (1)

Teil c)

Stammfunktion: $F_t'(x) = f_t(x)$ (2)

Flächenberechnung: $A(u) = F(0) - F(-u) = e^2(1 - e^{-u})$. (3)

Teil d)

$A(a) = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\ f_2(-a)-a = \frac{1}{2}\cdot a\cdot e^{2-a}$ mit a > 0. (3)

$A'(a) = \frac{1}{2}\cdot(1-a)\cdot e^{2-a}$ und $A''(a) = \frac{1}{2}\cdot(a-2)\cdot e^{2-a}$ (2)

relatives Maximum (A'(a) = 0 und A''(a) < 0) bei a = 1 (2)

maximale Fläche: $A(1) = \frac{1}{2}e$. (1)

Aufgabe 4: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Integration, Optimierungsaufgabe, Ortskurve

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen f_t und g gegeben durch $f_t(x) = (t - x)\cdot e^{t+x}$ und $g(x) = -x\cdot e^{1+x}$. K_t ist das Schaubild von f_t und G ist das Schaubild von g.

a) Zeigen Sie, daß $f_1'(x) = g(x)$ ist. Untersuchen Sie K_1 auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Asymptoten, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K_1 und G für $-5 \le x \le 1$ mit 1 LE = 1 cm. (12)

b) K_1 und die Koordinatenachsen begrenzen im ersten Feld eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. (6)

c) Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u \le 0$ schneidet K_1 in A und G in B. Die Punkte A und B sowie der Koordinatenursprung O bilden ein Dreieck. Bestimmen Sie u so, dass die Fläche dieses Dreiecks maximal wird und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an. (7)

d) Bestimmen Sie die Ortskurve der Wendepunkte von K_t. (5)

Lösung

Teil a)

Ableitungen: $f_1'(x) = -x\cdot e^{1+x}$, $f_1''(x) = (-x-1)\cdot e^{1+x}$ (2)

Schnittpunkt mit der y-Achse (x = 0): $N_y(0|e)$ (0,5)

Schnittpunkt mit der x-Achse (f(x) = 0): $N_x(1|0)$ (1)

Hochpunkt ($f_1'(x) = 0$ mit VZW): $H(0|e)$ (2)

Wendepunkt ($f_1''(x) = 0$ mit VZW: $W(-1|2)$ (3)

Asymptote: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, also waagr. A. y = 0 für $x \to -\infty$ (0,5)

Wertetabelle und Schaubild: (3)

Teil b)

$$A = \int_0^1 (1-x)\cdot e^{1+x}dx \qquad (1)$$

$$= \left[(1-x)\cdot e^{1+x}\right]_0^1 - \int_0^1 (-1)\cdot e^{1+x}dx \qquad (3)$$

$$= \left[(1-x)\cdot e^{1+x}\right]_0^1 + \left[e^{1+x}\right]_0^1 \qquad (1)$$

$$= e^2 - 2e \qquad (1)$$

Teil c)

$A(u) = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h = \frac{1}{2}\cdot(-u)\cdot(f_1(u) - g(u)) = -\frac{1}{2}\cdot u\cdot e^{1+u}$ mit $u \le 0$ (1,5)

$\Rightarrow A'(u) = -\frac{1}{2}\cdot(1+u)\cdot e^{1+u}$ und $A''(u) = -\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{2}u)\cdot e^{1+u}$ (2)

relatives Maximum ($A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$) bei $u = -1$ (1)

Randwerte: $A(0) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} A(x) = 0$ (2)

$\Rightarrow$ absolutes Maximum bei $u = -1$ mit $A(-1) = 0,5\cdot$. (1)

Teil d)

Ableitungen: $f_t'(t) = (t - 1 - x)\cdot e^{t+x}$, $f_t''(t) = (t - 2 - x)\cdot e^{t+x}$ und $f'''(t) = (t - 3 - x)\cdot e^{t+x}$ (3)

Wendepunkt ($f_t''(x) = 0$ mit VZW): $W(t-2|2\cdot e^{2t-2})$ (1)

Ortskurve: $y = 2\cdot e^{2x+2}$ mit $x \in \mathbb{R}$. (1)

Aufgabe 5: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Integration, Optimierungsaufgabe, Ortskurve

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen f_t und g gegeben durch $f'_t(x) = (t + x)\cdot e^{t-x}$ und $g(x) = x\cdot e^{1-x}$. K_t ist das Schaubild von f_t und G ist das Schaubild von g.

a) Zeigen Sie, daß $f_1'(x) = -g(x)$ ist. Untersuchen Sie K_1 auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Asymptoten, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K_1 und G für $-1 \le x \le 5$ mit 1 LE = 1 cm. (12)

b) K_1 und die Koordinatenachsen begrenzen im zweiten Feld eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. (6)

c) Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit u ¤ 0 schneidet K_1 in A und G in B. Die Punkte A und B sowie der Koordinatenursprung O bilden ein Dreieck. Bestimmen Sie u so, dass die Fläche dieses Dreiecks maximal wird und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an. (7)

d) Bestimmen Sie die Ortskurve der Wendepunkte von K_t. (5)

Lösung
Teil a)

Ableitungen: $f_1(x) = (1 + x)\cdot e^{1-x}$, $f_1'(x) = -x\cdot e^{1-x}$ und $f_1''(x) = (x - 1)\cdot e^{1-x}$ (2)
Schnittpunkt mit der y-Achse (x = 0): $N_y(0|e)$ (0,5)

Schnittpunkt mit der x-Achse (f(x) = 0): $N_x(-1|0)$ (1)

Hochpunkt ($f_1'(x) = 0$ und $f_1''(x) < 0$): H(0|e) (2)

Wendepunkt ($f_1''(x) = 0$ mit VZW): W(1|2) (3)

Asymptote: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$, also waagrechte Asymptote y = 0 für $x \to +\infty$ (0,5)

Wertetabelle und Schaubild: (vgl. Gruppe A) (3)

Teil b)

$$A = \int_{-1}^{0} (1+x)\cdot e^{1-x}dx \quad (1)$$

$$= \left[(1+x)\cdot(-e^{1-x})\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -e^{1-x}dx \quad \text{(Produktintegration)} \quad (3)$$

$$= \left[(1+x)\cdot(-e^{1-x})\right]_{-1}^{0} - \left[e^{1-x}\right]_{-1}^{0} \quad (1)$$

$$= e^2 - 2e \quad (1)$$

Teil c)

$A(u) = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h = \frac{1}{2}\cdot u\cdot(f_1(u) - g(u)) = \frac{1}{2}\cdot u\cdot e^{1-u}$ (1,5)

Ableitungen: $A'(u) = -\frac{1}{2}\cdot(1+u)\cdot e^{1+u}$ und $A''(u) = -\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{2}u)\cdot e^{1+u}$ (2)

=> relatives Maximum (A'(u) = 0 und A''(u) < 0) bei u = −1 (1)
Randwerte $A(0) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} A(x) = 0$ (2)

=> absolutes Maximum bei u = −1 mit A(−1) = 0,5·. (1)

Teil d)

Ableitungen: $f_t'(t) = (t - 1 - x)\cdot e^{t+x}$, $f_t''(t) = (t - 2 - x)\cdot e^{t+x}$ und $f'''(t) = (t - 3 - x)\cdot e^{t+x}$ (3)

Wendepunkt ($f_t''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$): $W(t - 2|2\cdot e^{2t-2})$ (1)

⇒ Ortskurve: $y = 2\cdot e^{2x+2}$ mit $x \in \mathbb{R}$. (1)

Aufgabe 6: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Integration, Rotationskörper, Optimierungsaufgabe

a) Untersuchen Sie das Schaubild von $f_t(x) = (2t - x)\cdot e^{tx}$ für t > 0 auf Achsenschnittpunkte, Extrem- sowie Wendepunkte. und skizzieren Sie den Verlauf von f_1. (10)
b) Berechnen Sie die Fläche, die durch f_t und die Koordinatenachsen im 1. Feld begrenzt wird. (6)
c) Berechnen Sie auf zwei Nachkommastellen genau das Volumen in dm^3 und das Gewicht in kg einer Salatschüssel aus Glas (ρ = 2,5 g/cm^3), die durch die im Bereich $0 \le x \le 2$ um die x-Achse rotierenden Schaubilder von $f_{0,8}$ und $f_{0,775}$ begrenzt wird. (1 LE = 1 dm) (6)
d) Berechnen Sie auf zwei Nachkommastellen genau die Kantenlängen und den Flächeninhalt des größten Rechteckes, das in den Raum zwischen den Koordinatenachsen und dem Schaubild von $f_{0,5}$ gelegt werden kann. (6)

Lösung
Teil a)

Achsenschnittpunkte: $S_x(2t|0)$ und $S_y(0|2t)$ (1)

Ableitungen: $f_t'(x) = (-tx + 2t^2 - 1)\cdot e^{tx}$ und $f_t''(x) = (-t^2x + 2t^3 - 2t)\cdot e^{tx}$ (2)

Hochpunkt ($f_t'(x) = 0$ und $f_t''(x) < 0$): $H(2t - \frac{1}{t} | \frac{1}{t}\cdot e^{2t^2-1})$ (3)

Wendepunkt ($f_t''(x) = 0$ mit VZW da einfache NST): $W(2t - \frac{2}{t} | \frac{2}{t}\cdot e^{2t^2-2})$ (3)

Schaubildskizze: (1)

Teil b)

$A_t \quad = \int_0^{2t} (2t-x)e^{tx}dx$ (1)

$= \left[(2t-x)\cdot\frac{1}{t}e^{tx}\right]_0^2 - \int_0^2 -\frac{1}{t}e^{tx}dx$

(2)

$= \left[\left(-\frac{x}{t}+2+\frac{1}{t^2}\right)e^{tx}\right]_0^{2t}$ (1)

$= \frac{1}{t^2}(e^{2t^2}-1)-2$ (2)

Teil c)

V $= V_{außen} - V_{innen}$ (1)

$= \pi\int_0^{1,6}(1,6-x)^2e^{1,6x}dx - \pi\int_0^{1,55}(1,55-x)^2e^{1,55x}dx$ (2)

= 9,356 − 8,035 (MATH 9: fnint) (2)
= 1,321 dm^3

M = ρV = 3,3 kg (1)

Teil d)

$A(u) = b\cdot h = u\cdot f_{0,5}(u) = u\cdot(1-u)\cdot e^{0,5u}$ mit $A_t'(u) = (-0,5u^2 - 1,5u+1)\cdot e^{tu}$ (2)

⇒ H(0,561|0,326) (CALC 4: maximum) (2)

⇒ Das Rechteck hat die Breite u = 0,561, die Höhe $f_{0,5}(u)$ = 0,581 (CALC 1: value)
und die Fläche A(u) = 0,326 FE (2)

Aufgabe 7: Kurvenuntersuchung, Rotationskörper

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+4}$ für $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f sei K.

a) Skizzieren Sie K mit Hilfe Ihres Taschenrechners (1)
b) Das Flächenstück zwischen K, der x-Achse und den Geraden x = 0 und x = 2 rotiert um die x-Achse. Bestimmen Sie das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers. (2)
c) Welche Eigenschaften von K können dem Funktionsterm f(x) ohne Verwendung von Ableitungen entnommen werden ? Begründen Sie. (5)

Lösung

Teil a) Skizze (1)

Teil b)

$V = \pi\int_0^2 f(x)^2\,dx = \int_0^2\left(\frac{2}{1+4e^{-2x}}\right)^2dx$ = 10,86 VE (CALC: 7 Sf(x)dx) (2)

Teilc)

f(x) > 0 ; da $2e^{2x>0}$ und $e^{2x}+4>0$ ⇒ K besitzt keine Schnittpunkte mit der x-Achse. (1)

$f(0) = \frac{2}{5}$ ⇒ $S(0|\frac{2}{5})$ ist Schnittpunkt von K mit der y-Achse. (0,5)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1+4e^{-2x}} = 0$ ⇒ K besitzt die waagrechte Asymptote y = 0. (1)

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+4e^{-2x}} = 2$ ⇒ K besitzt die waagrechte Asymptote y = 2. (1)

$1+4e^{-2x}$ fällt streng monoton ⇒ $\frac{2}{1+4e^{-2x}}$ wächst streng monoton; (1)

Da f streng monoton wächst, besitzt K **keine Extrempunkte**. (0,5)

Aufgabe 8: Kurvenuntersuchung, Rotationskörper

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{4-e^{2x}}{4+e^{2x}}$ für $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f sei K.

a) Skizzieren Sie K mit Hilfe Ihres Taschenrechners (1)

b) Das Flächenstück zwischen K, der x-Achse und den Geraden $x = -2$ und $x = 0$ rotiert um die x-Achse. Bestimmen Sie das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers. (2)

c) Welche Eigenschaften von K können dem Funktionsterm f(x) ohne Verwendung von Ableitungen entnommen werden ? Begründen Sie. (5)

Lösung

Teil a) Skizze (1)

Teil b)

$V = \pi \int_0^2 f(x)^2\, dx = \pi \int_{-2}^{0} \left(\frac{4-e^{2x}}{4+e^{2x}}\right)^2 dx$ = 5,06 VE (CALC: 7 Sf(x)dx) (2)

Teilc)

$f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln 4 \Rightarrow S(\frac{1}{2}\ln 4|0)$ ist Schnittpunkt von K mit der x-Achse. (1)

$f(0) = \frac{3}{5} \Rightarrow S(0|\frac{3}{5})$ ist Schnittpunkt von K mit der y-Achse. (0,5)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4-e^{2x}}{4+e^{2x}} = 1 \Rightarrow$ K besitzt die waagrechte Asymptote y = 1. (1)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4-e^{2x}}{4+e^{2x}} = -1 \Rightarrow$ K besitzt die waagrechte Asymptote $y = -1$. (1)

$4 - e^{2x}$ fällt streng monoton und $4 + e^{2x}$ wächst streng monoton $\Rightarrow \frac{4-e^{2x}}{4+e^{2x}}$ fällt streng monoton; (1)

Da f streng monoton fällt, besitzt K **keine Extrempunkte**. (0,5)

Aufgabe 9: Kurvenuntersuchung, Integration, Optimierungsaufgabe

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = e^x - \frac{e}{2}x^2 - \frac{e}{2}$ und $g(x) = e^x - e$ mit den Schaubildern K und G.

a) Untersuchen Sie K auf Achsenschnittpunkte, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K und G im Bereich $-2 \le x \le 2$ mit 1 LE = 1 cm in ein gemeinsames Koordinatensystem. (12)

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch die Schaubilder K und G sowie die y-Achse begrenzt wird. (8)

c) Bestimmen Sie u mit $0 \le u \le 1$ so, dass das Dreieck mit den Ecken O(0|0), P(u|f(u)) und Q(u|g(u)) eine maximale Fläche erhält. (10)

Aufgabe 10: Kurvenuntersuchung, Integration, Optimierungsaufgabe

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = e^x - ex$ und $g(x) = e^x - e$. Die Schaubilder von f und g heißen K und G.

a) Untersuchen Sie K auf Achsenschnittpunkte, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K und G sowie die Gerade $A(x) = -ex$ im Bereich $-2 \le x \le 2$ mit 1 LE = 1 cm in ein gemeinsames Koordinatensystem. Begründen Sie mit Hilfe der Grenzwertschreibweise und anhand der Zeichnung, dass A(x) für $x \to -\infty$ eine Asymptote für K ist. (12)

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch die Schaubilder K und G sowie die y-Achse begrenzt wird. (8)

c) Bestimmen Sie u mit $0 \le u \le 1$ so, dass das Dreieck mit den Ecken O(0|0), P(u|f(u)) und Q(u|g(u)) eine maximale Fläche erhält.

Aufgabe 11: Kurvenuntersuchung, uneigentliches Integral (19)

a) Untersuche $f(x) = 2xe^{-x^2}$ auf Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Extrem- und Wendepunkte. Skizziere dann das Schaubild. (14)

b) Berechne den Inhalt der gesamten Fläche, die von der x-Achse und dem Schaubild von f eingeschlossen wird. (5)

Lösungen:

Symmetrie: f ist symmetrisch zum Ursprung, da $f(-x) = -f(x)$ (1)

Die x-Achse ist Asymptote für $x \to \pm\infty$, da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{e^{x^2}}$. (1)

Ableitungen: $f'(x) = 2(1 - 2x^2)\ e^{-x^2}$ und $f''(x) = 2x(4x^2 - 3)\ e^{-x^2}$ (2)

Extrempunkte ($f'(x) = 0$ und $f''(x)$ </> 0): TP/HP$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \mid \mp\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$ (4)

Wendepunkte ($f''(x) = 0$ mit VZW da einfache NST) $WP_1(0|0)$ und $WP_{2/3}\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3} \mid \mp\sqrt{3}\cdot e^{-\frac{3}{4}}\right)$ (4)

Beschriftete Skizze (2)

$A = 2\int_0^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx = 2\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^{t} 2xe^{x^2}\,dx = -2\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^{t^2} e^z\,dz = -2\lim\limits_{t\to\infty}\left(e^{-t^2} - 1\right) = 2$ (5)