5.5. Konkrete Abituraufgaben zu Exponentialfunktionen

Aufgabe 1: Kurvenuntersuchung, Integration (10)
Über ein Ventil kann das Wasservolumen in einem Wasserbehälter geregelt werden. Die Stärke des Wasserstroms durch dieses Ventil ist gegeben durch eine Funktion

$$f(t) = 4e^{-t} - 0{,}1\,e^{t} \text{ mit } t > 0,\ t \text{ in h und } f(t) \text{ in } m^3h^{-1}.$$

Dabei bedeuten positive Funktionswerte eine Wasserzufuhr, negative Funktionswerte eine Wasserentnahme. Zu Beobachtungsbeginn $t = 0$ befinden sich 10 m^3 im Behälter.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f und mit diesem das Schaubild der Funktion g, die die Entwicklung des Wasservolumens im Behälter beschreibt. (3)
b) Begründen Sie den Verlauf des Schaubildes von g. (3)
c) Bestimmen Sie den maximalen Wert, den das Wasservolumen im Behälter erreichen kann. (3)
d) Eine Beschreibung des Wasserstroms durch das Ventil durch die Funktion f ist nur realistisch für Zeiten $t < T$, wobei T derjenige Zeitpunkt ist, zu dem der Wasserbehälter leer ist. Bestimmen Sie T. (1)

Lösung

a)	Skizze von f mit Beschriftung (GTR)	(1)
	Skizze von g mit Beschriftung (GTR)	(2)
b)	Begründung für den Verlauf des Schaubildes von g:	
	g ist Integralfunktion oder Stammfunktion von f mit $g(0) = 10$.	(1)
	Für $t < t_0$ ist $f(t) > 0 \Rightarrow$ das Wasservolumen nimmt zu $\Rightarrow$ g ist streng monoton steigend.	(0,5)
	Bei $t = t_0$ ist das maximale Volumen im Behälter erreicht $\Rightarrow$ g hat dort ein Maximum	(1)
	Für $t > t_0$ ist $f(t) < 0 \Rightarrow$ das Wasservolumen nimmt ab $\Rightarrow$ g ist streng monoton fallend.	(0,5)
c)	$f(t_0) = 0 \Rightarrow 4e^{-t} - 0{,}1e^{t} = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{2}\ln 40 \approx 1{,}844$ (GTR oder Substitution $x = e^t$)	(1)
	$g(t) = F_c(t) = -4e^{-t} - 0{,}1e^{t} + c$ mit $g(0) = 10 \Rightarrow c = 14{,}1. \Rightarrow g(1{,}844) \approx 12{,}835$ (GTR)	(2)
d)	$g(T) = -4e^{-T} - 0{,}1e^{T} + 14{,}1 = 0$ für $T \approx 4{,}947$ (GTR)	(1)

Aufgabe 2: Kurvenuntersuchung, Integration (10)
Über ein Ventil kann das Wasservolumen in einem Wasserbehälter geregelt werden. Die Stärke des Wasserstroms durch dieses Ventil ist gegeben durch eine Funktion

$$f(t) = 5e^{-t} - 0{,}2\,e^{t} \text{ mit } t > 0,\ t \text{ in h und } f(t) \text{ in } m^3h^{-1}.$$

Dabei bedeuten positive Funktionswerte eine Wasserzufuhr, negative Funktionswerte eine Wasserentnahme. Zu Beobachtungsbeginn $t = 0$ befinden sich 20 m^3 im Behälter.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f und mit diesem das Schaubild der Funktion g, die die Entwicklung des Wasservolumens im Behälter beschreibt. (3)
b) Begründen Sie den Verlauf des Schaubildes von g. (3)
c) Bestimmen Sie den maximalen Wert, den das Wasservolumen im Behälter erreichen kann. (3)
d) Eine Beschreibung des Wasserstroms durch das Ventil durch die Funktion f ist nur realistisch für Zeiten $t < T$, wobei T derjenige Zeitpunkt ist, zu dem der Wasserbehälter leer ist. Bestimmen Sie T. (1)

Lösung

a)	Skizzen von f mit Beschriftung (GTR)	(1)
	Skizzen von g mit Beschriftung (GTR)	(2)
b)	Begründung für den Verlauf des Schaubildes von g:	
	g ist Integralfunktion oder Stammfunktion von f mit $g(0) = 20$.	(1)
	Für $t < t_0$ ist $f(t) > 0 \Rightarrow$ das Wasservolumen nimmt zu $\Rightarrow$ g ist streng monoton steigend.	(0,5)
	Für $t = t_0$ ist das maximale Volumen im Behälter erreicht $\Rightarrow$ g hat dort ein Maximum	(1)
	Für $t > t_0$ ist $f(t) < 0 \Rightarrow$ das Wasservolumen nimmt ab $\Rightarrow$ g ist streng monoton fallend.	(0,5)
c)	$f(t_0) = 0 \Leftrightarrow 5e^{-t} - 0{,}2e^{t} = 0 \Rightarrow t_0 = \ln 5 \approx 1{,}609$ (GTR oder Substitution $x = e^t$)	(1)
	$g(t) = F_c(t) = -5e^{-t} - 0{,}2e^{t} + c$ mit $g(0) = 20 \Rightarrow c = 25{,}2. \Rightarrow g(1{,}609) \approx 23{,}2$ (GTR)	(2)
d)	$g(T) = -5e^{-T} - 0{,}2e^{T} + 25{,}2 = 0$ für $T \approx 4{,}835$ (GTR)	(1)

Aufgabe 3: Ortskurven, Integration, logistisches Wachstum (14)

Für jedes k > 0 ist die Funktion f_k gegeben durch $f_k(x) = \frac{3ke^x}{e^{2x}+k}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei C_k.

a) Skizzieren Sie für drei selbst gewählte Werte von k die Schaubilder C_k in ein gemeinsames Koordinatensystem. Untersuchen Sie das Verhalten von C_k für $x \to \pm\infty$. Stellen Sie gemeinsame Eigenschaften der skizzierten Schaubilder zusammen. (5)

b) Jedes Schaubild C_k hat genau einen Hochpunkt. Berechnen Sie seine Koordinaten. Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve. Ergänzen Sie die Skizze aus a) um diese Ortskurve. (6)

c) Der Term $f_4(x)$ beschreibt für $x \geq 0$ die Zuwachsrate der von einer Bakterienkultur bedeckten Fläche zu Zeitpunkt x (x in min ab Beobachtungsbeginn, $f_4(x)$ in cm^2/min) Um wie viele cm^2 vergrößert sich die von der Kultur bedeckte Fläche in den ersten 2 Minuten? (3)

Lösung

a) Skizzen (2)

$f_k(x) = \frac{3k}{e^x + ke^{-x}} \to 0$ für $x \to \pm\infty$, da der Nenner $e^x + ke^{-x} \to \infty$ für $x \to \pm\infty$. (1)

gemeinsame Eigenschaften sind z.B. (2)
Sie verlaufen oberhalb der x-Achse
Sie haben die x-Achse als waagrechte Asymptote.
Sie haben genau einen Hochpunkt und keinen Tiefpunkt.
Sie haben genau zwei Wendepunkte.
Sie sind achsensymmetrisch zur Senkrechte durch den Hochpunkt.
Sie sind links vom HP streng monoton steigend und rechts davon streng monoton fallend

b) $f_k'(x) = \frac{3ke^x(k-e^{2x})}{(e^{2x}+k)^{\rightarrow}}$ (2)

Hochpunkt ($f_k'(x) = 0$ mit VZW von + nach −): $H(\frac{1}{2}\ln(k) \mid \frac{3}{2}\sqrt{k})$ (2)

Ortskurve $y = \frac{3}{2}e^x$ (1)

Skizze (1)

c) Die Fläche nimmt in den ersten zwei Minuten um $\int_0^2 f_4(x)dx = \int_0^2 \frac{12e^x}{e^{2x}+4}dx \approx 5{,}1\ cm^2$ zu (3)

Aufgabe 4: Kurvenuntersuchung, Änderungsrate, Stammfunktion (11)

Eine Forschungsgruppe versucht, die Entwicklung eines Fischbestandes in einem See durch ein mathematisches Modell zu erfassen. Zu Beginn der Untersuchung leben im See 4 Millionen Fische. Die Änderungsrate des Bestandes wird in diesem Modell durch eine Funktion f mit $f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$; $t \geq 0$ beschrieben (t in Jahren seit Untersuchungsbeginn, f(t) in Millionen pro Jahr).

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f für $0{,}5 \leq t \leq 6$. (1)
Untersuchen Sie das Verhalten von f für $t \to \infty$. (1)
Weisen Sie nach, dass f für t > 0 monoton abnimmt. (2)
Bedeutet dies, dass der Fischbestand abnimmt? Begründen Sie Ihre Antwort. (2)

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit F(t) $\frac{-1}{1+e^t}$ eine Stammfunktion von f ist.
Welcher Fischbestand ist zwei Jahre nach Beginn der Untersuchung zu erwarten?
Welcher Fischbestand ist langfristig zu erwarten?

Lösung

a) Skizze (1)

$f(t) = \frac{e^t}{e^{2t}+2e^t+1} = \frac{1}{e^t+2+e^{-t}} \to 0$ für $t \to \pm\infty$, die x-Achse ist waagrechte Asymptote (1)

$f'(t) = \frac{e^{-t}-e^t}{(e^t+2+e^{-t})^2} < 0$ für $t > 0 \Rightarrow$ f sinkt streng monoton für t > 0 (2)

Der Fischbestand steigt weiter, da die Änderungsrate $f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} > 0$ für $t \in \mathbb{R}$ (2)

b) $F'(t) = \frac{0\cdot(1+e^t)-(-1)\cdot e^t}{(1+e^t)^2} = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = f(t)$ mit der Quotientenregel (1)

Der Bestand nach zwei Jahren ist $4 + \int_0^2 f(t)dt = 4 + [F(t)]_0^2 \approx 4 - 0{,}119 + 0{,}5 = 4{,}381$ Millionen (2)

Langfristig erreicht der Fischbestand die Schranke $4 + \int_0^\infty f(t)dt = 4 - 0 + 0{,}5 = 4{,}5$ Millionen (2)

Aufgabe 5. Kurvenuntersuchung, Integration (10)

Die Niederschlagsrate während eines etwa einwöchigen Dauerregens wird modellhaft beschrieben durch die Funktion r mit $r(t)=25 - 0{,}02\cdot e^t$. Dabei wird t in Tagen seit Einsetzen des Regens und r(t) in Liter pro m^2 und Tag gemessen.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von r in einem geeigneten Koordinatensystem. (1)
   Wann hört der Regen auf? (1)
   Welche Wassermenge geht insgesamt auf jeden Quadratmeter Fläche des betroffenen Gebietes nieder? (3)
b) Fließgewässer, Versickerung usw. tragen zum Wasserabfluss bei. Die Wasserabflussrate wird durch die Funktion a mit $a(t) = 6 + 50\cdot e^{-0{,}477\cdot t}$ modelliert (t in Tagen seit Einsetzen des Regens; a(t) in Liter pro m^2 und Tag). Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion a im vorhandenen Koordinatensystem. (1)
   Wie groß ist im Modell die Wasserabflussrate beim Einsetzen des Regens? (1)
   Bewerten Sie dieses Ergebnis. (2)
c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem das Wasser nicht mehr vollständig abfließt. (2)
   Die beiden Schaubilder schließen eine Fläche ein. Interpretieren Sie den Inhalt dieser Fläche. (3)
d) Wann ist die im Laufe des Regens niedergegangene Wassermenge abgeflossen? (4)

Lösung

a) Skizze (1)
   $r(t) = 0 \Leftrightarrow t = \ln(1250) \approx 7{,}13$ Tage (1)
   Insgesamt $\int_0^{\ln 1250} r(t)dt = 25\cdot\ln(1250) + 0{,}02\cdot(1250 - 1) \approx 203{,}25$ Liter pro m^2. (3)
b) Skizze (1)
   Zu Beginn ist die Abflussrate $a(0) = 56$ Liter/m^2·Tag viel größer als die Niederschlagsrate $r(0) = 25$ Liter/m^2·Tag. (1)
   Der ausgetrocknete Boden saugt das Wasser viel schneller auf als es nachkommt und bleibt in der ersten Zeit des Regens oberflächlich trocken! (2)
c) $a(t) = r(t) \Leftrightarrow x \approx 2{,}04$, d.h. zu Beginn des dritten Tages (2)
   Die von den Schaubildern eingeschlossene Fläche gibt die gesamte Menge an Oberflächenwasser in Liter / m^2an, die sich währende des Regens anstaut. (2)
d) Das angestaute Wasser ist abgeflossen, wenn $\int_{2,04}^{x} (a(t) - r(t))dt = 0 \Leftrightarrow \left[-10t + 0{,}02\cdot e^t - \frac{50}{0{,}477}e^{-0{,}477t}\right]_{2,04}^{x}$
   $= 0 \Leftrightarrow x = 8{,}32$ (GTR), also am Morgen des 9. Tages (4)

Aufgabe 6. Mittelwert, Tangente, Verschiebung, Ordinatenaddition (18)

Durch $f(t) = 20t\cdot e^{-0{,}5t}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und f(t) in mg/Liter gemessen. Die folgenden Betrachtungen sind nur für die Zeitspanne der ersten 12 Stunden nach der Einnahme des Medikaments durchzuführen.

a) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentration. (2)
   Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert? (0,5)
   Wie groß ist dieser höchste Wert ? (0,5)
   Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens 4 mg/Liter beträgt. Berechnen Sie die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist. (1)
   Wie hoch ist die mittlere Konzentration des Medikaments innerhalb der ersten 12 Stunden? (1)
b) Zu welchem Zeitpunkt wird das Medikament am stärksten abgebaut? (1)
   Wie groß ist zum Zeitpunkt t = 4 die momentane Änderungsrate der Konzentration? (1)
   Ab diesem Zeitpunkt wird die Konzentration des Medikaments nun näherungsweise durch die Tangente an das Schaubild von f an der Stelle t = 4 beschrieben. Bestimmen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist. (2)

c) Anstelle der Näherung aus Teilaufgabe b) wird nun wieder die Beschreibung der Konzentration durch f verwendet. Vier Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen. Es wird angenommen, dass sich dabei die Konzentrationen im Blut des Patienten addieren. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Gesamtkonzentration für $0 \leq t \leq 12$. (2)
Die Konzentration des Medikaments im Blut darf 20 mg/Liter nicht übersteigen. Wird diese Vorgabe in diesem Fall eingehalten? (3)

d) Das Medikament wird nun in seiner Zusammensetzung verändert. Die Konzentration des Medikaments im Blut wird durch $g(t) = at \cdot e^{-bt}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und g(t) in mg/Liter gemessen. Bestimmen Sie die Konstanten a und b, wenn die Konzentration vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert 10 mg/l erreicht. (4)

Lösung

a) Skizze
(2)
Das Maximum wird bei $t \approx 2{,}00$ mit $f(2) \approx 14{,}7$ mg/Liter erreicht (GTR) (1)
$f(t) = 4 \Leftrightarrow t_1 \approx 0{,}22$ und $t_2 \approx 7{,}15$ (GTR) $\Rightarrow$ wirksame Zeitspanne von ca. 6,9 Stunden (1)
Die mittlere Konzentration in den ersten 12 Stunden ist $\frac{1}{12}\int_0^{12} f(t)dt \approx 6{,}55$ mg/Liter (GTR) (1)

b) Der stärkste Abbau wird an der Wendestelle bei $t \approx 4{,}00$ Stunden erreicht (GTR) (1)
Die momentane Änderungsrate ist dort $f'(4) \approx -2{,}71$ mg/Liter und Stunde (GTR) (1)
Die Tangente an der Stelle t = 4 hat die Gleichung $y = -2{,}71t + 20{,}87$ (GTR) und schneidet die t-Achse bei $t \approx 8{,}00 \Rightarrow$ nach ca. 8 Stunden ist das Medikament vollständig abgebaut (2)

c) Skizze (2)
Für $t \geq 4$ wird die Konzentration durch $k(t) = f(t) + f(t - 4)$ beschrieben. (1)
Sie erreicht ihr Maximum bei $t \approx 5{,}52$ mit $k(5{,}52) \approx 21{,}20$ mg/Liter > 20 mg/Liter (GTR) (1)

d) Ableitung$'(t) = (1 - bt)ae^{-bt}$ (1)
$g'(4) = 0 \Leftrightarrow (1 - 4b)e^{-4b} = 0$ (1)
$g(4) = 10 \Leftrightarrow 4ae^{-4b} = 10$ (1)
$\Rightarrow b = 0{,}25$ und $a = 2{,}5e \approx 6{,}80$ (1)

Aufgabe 7: Funktionsanpassung, Kurvenuntersuchung, Integration (14)

Eine Musikagentur veröffentlicht eine CD „Summer Hits". In der ersten Verkaufswoche werden nur 135 CDs verkauft. Die Tabelle enthält die Verkaufszahlen der Folgewochen:

Folgewoche	1	2	3
Wöchentliche Verkaufszahl	223	371	600

a) Die zeitliche Entwicklung der wöchentlichen Verkaufszahlen soll durch eine Exponentialfunktion f beschrieben werden.
Begründen Sie, dass die vorliegenden Daten einen derartigen Ansatz rechtfertigen.
Ermitteln Sie eine geeignete Funktion f.
Wie viele CDs werden nach diesem Modell in der achten Folgewoche verkauft?
In welcher Woche werden voraussichtlich erstmals über 20 000 CDs verkauft?
(5 VP)

b) Die Marketingabteilung erwartet eine Entwicklung der wöchentlichen Verkaufszahlen gemäß einer Funktion g mit $g(t) = \frac{8100000}{e^{0,5t} + 60000 \cdot e^{-0,5t}}$, wobei t = Nummer der Folgewoche.
Begründen Sie, warum die Funktion g für die Entwicklung der wöchentlichen Verkaufszahlen realistischer ist als die Funktion f aus Teilaufgabe a).
Wie viele CDs werden nach dem neuen Modell während der ersten 15 Wochen verkauft?
Wann ändern sich die wöchentlichen Verkaufszahlen am stärksten?
(5 VP)

c) Für die erste Verkaufswoche und jede Folgewoche werden jeweils 6500 CDs produziert.
Entscheiden Sie rechnerisch, ob bei dem durch g prognostizierten Verkaufsverlauf während der ersten 20 Verkaufswochen stets genügend CDs zur Verfügung stehen.
(4 VP)

Lösung

a) Da die Zuwächse annähernd proportional zum Bestand sind, handelt es sich näherungsweise um exponentielles Wachstum: $\frac{f(1)-f(0)}{f(0)} \approx 0{,}65$, $\frac{f(2)-f(1)}{f(1)} \approx 0{,}66$ und $\frac{f(3)-f(2)}{f(2)} \approx 0{,}62$. Mit dem GTR (ExpRg) erhält man $f(t) \approx 135{,}48 \cdot 1{,}65^t$. Für die 8. Folgewoche ergeben sich $f(8) \approx 7300$ verkaufte CDs und $f(t) > 20\,000$ ist für $t > 10$ erfüllt, d.h., von der 10. Folgewoche an. (5)

b) Aufgrund der zu erwartenden Marktsättigung werden die Verkaufszahlen ein Maximum erreichen und anschließend wieder absinken. F(t) wächst aber unbeschränkt. In den ersten 15 Wochen werden ungefähr $\int_0^{15} g(t)dt \approx 94711$ CDs verkauft. Die Änderung der wöchentlichen Verkaufszahlen ist maximal, wenn der Betrag der Ableitung $|g'(t)|$ maximal ist, also bei $t \approx 9{,}23$ in der 9. Folgewoche und bei $t \approx 12{,}7$ in der 12. Folgewoche.

c) Der Überschuß $6500t - \int_0^t f(x)dx$ ist für alle $t > 0$ positiv. Das Minimum des Lagerbestandes wird in der 14. Folgewoche mit 1871 CDs erreicht. Der maximale Lagerbestand wird in der 7. Folgewoche mit 27809 CDs erreicht (nicht verlangt).

Aufgabe 8: Beschränktes Wachstum, Kurvenuntersuchung, Verschiebung (18)

Die Geschwindigkeit einer in einer Flüssigkeit sinkenden Metallkugel lässt sich durch eine Funktion v mit $v(t) = \frac{10}{a}(1 - e^{-at})$ beschreiben. Dabei ist $a > 0$, t in Sekunden nach Beginn des Sinkvorgangs und v(t) in m/s.

a) Für eine Kugel k_1 gilt: Ihre Geschwindigkeit nähert sich mit zunehmender Sinkdauer dem Wert 14 m/s an.
Berechnen Sie den Wert des Parameters a für die Kugel K_1.
Skizzieren Sie für diese Kugel K_1 das Schaubild von v.
Wann überschreitet die Geschwindigkeit der Kugel 5 m/s?
Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit der Kugel ständig zunimmt.
Berechnen Sie die Länge des nach zwei Sekunden zurückgelegten Wegs.
(Teilergebnis a = 0,71) (8)

b) Für eine zweite Kugel K_2 gilt a = 0,5.
Dieses beginnt drei Sekunden nach der Kugel K_1 von der gleichen Stelle aus zu sinken.
Skizzieren Sie das Schaubild der Geschwindigkeitsfunktion von K_2 im vorhandenen Koordinatensystem.
Wann ist der Vorsprung von K_1 am größten? (4)

c) Für eine dritte Kugel K_3 gilt a = 1,15.
Zeigen Sie, dass dieses Kugel währende der zweiten Sekunde des Sinkvorganges ungefähr doppelt so weit sinkt wie währende der ersten Sekunde.
Was muss für a gelten, damit der von der Kugel während der zweiten Sekunde zurückgelegte Weg 1,5 mal so lang ist wie der währende der ersten Sekunde zurückgelegte Weg ? (6)

Lösung

a) Aus $\lim\limits_{t\to\infty} f(x) = \frac{10}{a}(1 - 0) = \frac{10}{a} = 14$ ergibt sich a = 0,71 (2)
Schaubild (1)
$v(t) = 5$ gilt für $t \approx 0{,}62$ (GTR) (1)
Die Geschwindigkeit der Kugel nimmt ständig zu, da $v'(t) = 10e^{-at} > 0$ für alle $t > 0$ und $a > 0$. (2)
Der in zwei Sekunden zurückgelegte Weg ist $\int_0^2 v(t)dt \approx 13{,}1$ m (GTR) (2)

b) K_2 hat die Geschwindigkeit $U(t) = 20\cdot(1 - e^{-0{,}5(t-3)})$ mit $t \geq 3$. (1)
Schaubild (1)
Der Vorsprung von K_1 wächst so lange, bis die Geschwindigkeiten beider Kugeln gleich sind. (1)
$v(t) = u(t)$ ergibt $t = 5{,}3$ (GTR). Der Vorsprung ist 5,3 s nach Beginn des ersten Sinkvorganges maximal.(1)

c) K_3 hat die Geschwindigkeit $w(t) = 8{,}70\cdot(1 - e^{-1{,}15t})$ (1)

Die zurückgelegten Wege sind in der ersten Sekunde $\int_0^1 w(t)dt \approx 3{,}53$ und in der zweiten Sekunde $\int_1^2 w(t)dt \approx 7{,}06$ (GTR), d.h. ca. doppelt so weit wie in der ersten Sekunde. (1)

Wenn der Weg innerhalb der zweiten Sekunde 1,5 mal so lang sein soll wie in der ersten Sekunde, muss gelten $\int_1^2 v(t)dt = 1{,}5\cdot\int_0^1 v(t)dt$ (1)

$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{10}{a}(1-e^{-at})dt = 1{,}5\cdot\int_0^1 \frac{10}{a}(1-e^{-at})dt \Leftrightarrow \frac{10}{a}\cdot\left[t+\frac{1}{a}e^{-at}\right]_1^2 = \frac{15}{a}\cdot\left[t+\frac{1}{a}e^{-at}\right]_0^1$ (1)

$\Leftrightarrow 2\cdot(1 + \frac{1}{a}e^{-2a} - \frac{1}{a}e^{-a}) = 3\cdot(1 + \frac{1}{a}e^{-a} - \frac{1}{a}) \Leftrightarrow 2a + 2e^{-2a} - 2e^{-a} = 3a + 3e^{-a} - 3$ (1)

$\Leftrightarrow -a + 2e^{-2a} - 5e^{-a} + 3 = 0 \Leftrightarrow a \approx 2{,}66$ (GTR) (1)