5.5. Abituraufgaben zu ganzrationalen Funktionen

Aufgabe 1: Kurvendiskussion, Fläche zwischen zwei Schaubildern (13)

Untersuchen Sie $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Extrempunkts sowie gemeinsame Punkte. Skizzieren Sie die beiden Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von f und g eingeschlossen wird.

Lösung

Symmetrie: f und g sind symmetrisch zur y-Achse, da $f(-x) = f(x)$ und $g(-x) = g(x)$ (1)

$f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-2)(x+2) \Rightarrow S_{fx1}(0|0)$ (doppelt, daher Berührpunkt ohne VZW) und $S_{fx2/3}(\pm 2|0)$ (1)

$g(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x+2) \Rightarrow S_{gx1/2}(\pm 2|0)$ und $S_{gy}(-4|0)$ (Scheitelpunkt = Tiefpunkt) (1)

Ableitungen: $f'(x) = 2x^3 - 4x = 2x(x^2 - 2)$ und $f''(x) = 6x^2 - 4$ (1)

Tiefpunkte ($f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$): $T_{f1/2}(\pm\sqrt{2}|-2)$ (2)

Gemeinsame Punkte: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$ (1)

$S_{fg1/2}(\pm 1|-\frac{3}{2})$ und $S_{fg3/4}(\pm 2|0)$ (1)

Flächeninhalt $A = 2\cdot\int_0^1 (f(x) - g(x))dx + 2\cdot\int_1^2 (g(x) - f(x))dx$ (1)

$= \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4)dx + \int_1^2 (-x^4 + 5x^2 - 4)dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - 4x\right]_1^2$ (1)

$= \frac{38}{15} + \frac{38}{15} + \frac{44}{15} = 8$ FE (1)

Beschriftete Skizze (2)

Aufgabe 2: Kurvenuntersuchung, Integration, Tangenten (15)

a) Untersuchen Sie das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$ auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Bestimmen Sie die Gleichungen der Wendetangenten. (**Lösung**: $t_{1/2} = \mp 4x \pm 4$) Skizzieren Sie die Schaubilder von f und ihren Wendetangenten mit Hilfe dieser Punkte in einem passenden Bereich.

b) Berechnen Sie den Inhalte der Fläche, die von den beiden Wendetangenten und dem Schaubild von f eingeschlossen wird.

Lösung

a) Symmetrie: $f(x) = f(-x)$ (gerade Funktion, Symmetrie zur y-Achse) (1)

Achsenschnittpunkte: $x = 0 \Rightarrow S_y(0|\frac{5}{2})$, (1)

$y = 0$ mit Substitution $z = x^2$ und p-q-Formel $\Rightarrow S_{x1/2}(\pm 1|0)$, $S_{x3/4}(\pm\sqrt{5}|0)$ (1)

Ableitungen: $f'(x) = 2x^3 - 6x$ und $f''(x) = 6x^2 - 6$ (1)

Hoch- und Tiefpunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0 \Rightarrow H(0|\frac{5}{2})$ und $T_{1/2}(\pm\sqrt{3}|-2)$ (2)

Wendepunkte: $f''(x) = 0$ mit VZW bzw. $f'''(x) \neq 0 \Rightarrow W_{1/2}(\pm 1|0)$ (1)

Wendetangenten: $t_{1/2}(x) = \mp 4x \pm 4$ (2)

Schaubildskizze (1)

b) $A = 2\int_0^1 (t_1(x) - f(x))dx = 2\cdot\int_0^1 (-\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 4x + \frac{3}{2})dx$ (2)

$= 2\cdot\left[-\frac{1}{10}x^5 + x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x\right]_0^1 = \frac{6}{5}$ FE (3)

Aufgabe 3: Kurvenuntersuchung, Integration, Tangenten (15)

a) Untersuchen Sie das Schaubild von $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}$ auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Bestimmen Sie die Gleichungen der Wendetangenten. (**Lösung**: $t_{1/2} = \mp 2x \pm 2$) Skizzieren Sie die Schaubilder von f und ihren Wendetangenten mit Hilfe dieser Punkte in einem passenden Bereich.

b) Berechnen Sie den Inhalte der Fläche, die von den beiden Wendetangenten und dem Schaubild von f eingeschlossen wird.

Lösung

a) Symmetrie: $f(x) = f(-x)$ (gerade Funktion, Symmetrie zur y-Achse) (1)

Achsenschnittpunkte: $x = 0 \Rightarrow S_y(0|-\frac{5}{4})$, (1)

$y = 0$ mit Substitution $z = x^2$ und p-q-Formel $\Rightarrow S_{x1/2}(\pm 1|0)$, $S_{x/3/4}(\pm\sqrt{5}|0)$ (1)

Ableitungen: $f'(x) = -x^3 + 3x$ und $f''(x) = -3x^2 + 3$ (1)

Hoch-und Tiefpunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0 \Rightarrow H(0|-\frac{5}{4})$ und $T_{1/2}(\pm\sqrt{3}|1)$ (2)

Wendepunkte: $f''(x) = 0$ mit VZW bzw. $f'''(x) \neq 0 \Rightarrow W_{1/2}(\pm 1|0)$ (1)

Wendetangenten: $t_{1/2}(x) = \mp 2x \pm 2$ (2)

Schaubildskizze (1)

b) $A = 2\int_0^1 (f(x) - t_2(x))dx = 2\cdot\int_0^1 (-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{4})dx$ (2)

$= 2\cdot\left[-\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{3}{4}x\right]_0^1 = \frac{3}{5}$ FE (3)

Aufgabe 4: Symmetrienachweis durch Verschiebung, Extremwertaufgabe, Integration (25)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + \frac{8}{3}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f ist K.

a) Untersuchen Sie K auf Schnittpunkte mit den Achsen, Hoch-, Tief- und Wendpunkte. Geben Sie die Koordinaten der Hoch– und Tiefpunkte auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet an. Zeichnen Sie K für $-4{,}5 \leq x \leq 2{,}5$ mit 1 LE = 1 cm. (10)

b) Zeigen Sie durch eine geeignete Verschiebung des Schaubildes, dass K symmetrisch ist zu $N(-1|0)$. Bestimmen Sie den Inhalt der Gesamtfläche, die von K und der x-Achse eingeschlossen wird. (7)

c) Zeichnen Sie die Kurve G der Funktion g mit $g(x) = -x^2 + \frac{8}{3}$ für $-3 \leq x \leq 3$ in das Achsenkreuz aus Teilaufgabe a) ein. Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ $(0 \leq u \leq 2)$ schneidet die Kurve K im Punkt R und die Kurve G im Punkt S. Für welches u wird der Inhalt des Dreiecks RSO am größten? Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt. (8)

Lösung

a) Schnittpunkt mit der y−Achse: $(x = 0)$ $S_y(0|\frac{8}{3})$ (0,5)

Schnittpunkt mit der x−Achse: $(f(x) = 0)$ $N_1(-1|0)$, $N_2(2|0)$ und $N_3(-4|0)$ (1,5)

Ableitungen: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + \frac{8}{3}$, $f'(x) = -x^2 - 2x + 2$ und $f''(x) = -2x - 2$ (2)

Hoch- und Tiefpunkte: $T(-1+\sqrt{3}|3{,}46) \approx T(0{,}73|3{,}46)$ und $H(-1-\sqrt{3}|-3{,}46) \approx H(-2{,}73|-3{,}46)$ (1,5)

Wendepunkte: ($f''(x)=0$ mit VZW bzw. $f'''(x\neq 0)$) $W(-1|0)$ (1,5)

Schaubild: (an x-Achse gespiegelt) (2) + (1) → d)

b) Symmetrie: $f(x-1) = -(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - \frac{1}{3}) - (x^2 - 2x + 1) + (2x - 2) + \frac{8}{3} = \frac{1}{3}x^3 + x$ (1)

$A = \left|\int_{-4}^{-1}(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + \frac{8}{3})dx\right| + \left|\int_{-1}^{2}(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + \frac{8}{3})dx\right|$ (oder A = 2·|...|) (1)

$= \left|\left[-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{8}{3}x\right]_{-4}^{-1}\right| + \left|\left[-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{8}{3}x\right]_{-1}^{2}\right|$ (2)

$= \left|\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+1-\frac{8}{3}\right)-\left(-\frac{256}{12}+\frac{64}{3}+16-\frac{32}{3}\right)\right| + \left|\left(-\frac{16}{12}-\frac{8}{3}+4+\frac{16}{3}\right)-\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+1-\frac{8}{3}\right)\right|$ (1)

$= \left|-\frac{17}{12}-\frac{16}{3}\right| + \left|\frac{16}{3}+\frac{17}{12}\right|$ (1)

$= \frac{27}{4} + \frac{27}{4}$

$=$ 13,5 FE (1)

c) Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken O(0|0), R (u(f(u)) und S(u|g(u)):

$A(u) = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot[(-\frac{1}{3}u^3 - u^2 + 2u + \frac{8}{3}) - (-u^2 + \frac{8}{3})]\ u = -\frac{1}{6}u^4 + u^2$ mit $0 \le u \le 2$ (2)

Ableitungen: $A'(u) = -\frac{2}{3}u^3 + 2u$ und $A''(u) = -2u^2 + 2$ (2)

relatives Maximum auf [0;2]: ($A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$) bei $u = \sqrt{3}$ (1)

Randwerte: $A(0) = 0$, $A(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}$ und $A(2) = \frac{4}{3} \Rightarrow$ absolutes Max für $u = \sqrt{3}$ mit $A(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}$. (2)

Aufgabe 5: Symmetrienachweis durch Verschiebung, Extremwertaufgabe, Integration (25)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + 4$ mit $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f ist K.

a) Untersuchen Sie K auf Schnittpunkte mit den Achsen, Hoch-, Tief- und Wendpunkte. Geben Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet an. Zeichnen Sie K für $-2{,}5 \le x \le 4{,}5$ mit 1 LE = 1 cm. (10)

b) Ziegen Sie durch eine geeignete Verschiebung des Schaubildes, dass K symmetrisch ist zu $N(-1|0)$.Bestimmen Sie den Inhalt der Gesamtfläche, die von K und der x-Achse eingeschlossen wird. (7)

c) Zeichnen Sie die Kurve G der Funktion g mit $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4$für $-3 \le x \le 3$ in das Achsenkreuz aus Teilaufgabe a) ein. Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ ($0 \le u \le 2$) schneidet die Kurve K im Punkt R und die Kurve G im Punkt S. Für welches u wird der Inhalt des Dreiecks RSO am größten? Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt. (8)

Lösung

a) Schnittpunkt mit der y-Achse: ($x = 0$) $S_y(0|4)$ (0,5)

Schnittpunkt mit der x−Achse: ($f(x) = 0$) $N_1(-1|0)$, $N_2(2|0)$ und $N_3(-4|0)$ (1,5)

Ableitungen: $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + 4$, $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + 3$ und $f''(x) = -3x - 3$ (2)

Hoch- und Tiefpunkte: $T(-1+\sqrt{3}\,|5{,}19) \approx T(0{,}73|5{,}19)$ und $H(-1-\sqrt{3}\,|-5{,}19) \approx H(-2{,}73|-5{,}19)$ (3)

Wendepunkte: ($f''(x)=0$ mit VZW bzw. $f'''(x\neq 0)$ $W(-1|0)$ (1,5)

Schaubild: (vgl. Gruppe A) (2) + (1) → d)

b) Symmetrie: $f(x-1) = -(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{1}{2}) - (\frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2}) + (3x-3) + 4 = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x$ (1)

$A = \left|\int_{-4}^{-1}(-\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x+4)dx\right| + \left|\int_{-1}^{2}(-\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x+4)dx\right|$ (2)

$= \left|\left[-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-4}^{-1}\right| + \left|\left[-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{2}\right|$ (2)

$= \left|\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-4\right)-\left(-\frac{256}{8}+\frac{64}{2}+24-16\right)\right| + \left|\left(-\frac{16}{8}-\frac{8}{2}+6+8\right)-\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-4\right)\right|$ (1)

$= \left|-\frac{17}{8}-8\right| + \left|8+\frac{17}{8}\right|$ (1)

$= \frac{81}{8} + \frac{81}{8}$

$= 20{,}25$ FE (1)

c) Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken O(0|0), R (u(f(u)) und S(u|g(u)):

$A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot [(-\frac{1}{2} u^3 - \frac{3}{2} u^2 + 3u + 4) - (-\frac{3}{2} u^2 + 4)]\ u = -\frac{1}{4} u^4 + \frac{3}{2} u^2$ mit $0 \le u \le 2$ (2)

Ableitungen: $A'(u) = -u^3 + 3u$ und $A''(u) = -3u^2 + 3$ (2)

relatives Maximum auf [0;2]: ($A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$) bei $u = \sqrt{3}$ (1)

Randwerte: $A(0) = 0$, $A(\sqrt{3}) = \frac{9}{4}$ und $A(2) = 2 \Rightarrow$ absolutes Max für $u = \sqrt{3}$ mit $A(\sqrt{3}) = \frac{9}{4}$. (2)

Aufgabe 6: Kurvenuntersuchung Optimierungsaufgabe, Integration (24)

Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f mit dem Schaubild K gegeben durch $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 24)$.

a) Untersuchen Sie das Schaubild K auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K im Bereich $-2{,}5 \le x \le 6{,}5$ mit 1 LE = 1cm. (7)

b) Die Gerade g mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$ und das Schaubild K begrenzen zwei Flächenstücke. Berechnen Sie deren Gesamtinhalt. (7)

c) Für $-2 \le u \le 2$ schneidet die Gerade mit der Gleichung x = u das Schaubild im Punkt A und die Gerade aus Teilaufgabe b) im Punkt B. Der Punkt C(2|1) bildet mit den Punkten A und B ein Dreieck. Für welchen Wert von u wird das Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal? (10)

Lösungen

a) Ableitungen: $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 24)$, $f'(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 12x)$, $f''(x) = \frac{1}{8}(6x - 12)$ und $f'''(x) = \frac{3}{4}$ (1,5)

Extrema: ($f'(x) = 0$ und $f''(x) </> 0$) T(4|−1) und H(0|3) (3)

Wendepunkt: ($f''(x)=0$ mit VZW bzw. $f'''(x) \neq 0$) W(2|1) (1,5)

Skizze: (1)

b) Schnittpunkte von g und K: Entweder rechnerisch durch Gleichsetzen g(x) = f(x) (ergibt Gleichung 3. Grades => Probieren) oder durch ablesen der Punkte aus dem Schaubild und Punktprobe: $x_1 = -23$, $x_2 = 6$, $x_3 = 2$ (1)

$$A = \left|\int_{-2}^{2} f(x) - g(x)\, dx\right| + \left|\int_{2}^{6} f(x) - g(x)\, dx\right| \quad (1)$$

$$= \left|\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 3\right)dx\right| + \left|\int_{2}^{6}\left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 3\right)dx\right| \quad (1)$$

$$= \left|\left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x\right]_{-2}^{2}\right| + \left|\left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x\right]_{2}^{6}\right| \quad (1)$$

$$= \left|(\frac{1}{16} - 2 - 1 + 6) - (\frac{1}{16} + 2 - 1 - 6)\right| + \left|(\frac{81}{2} - 54 - 9 + 18) - (\frac{1}{2} - 2 - 1 + 6)\right| \quad (1)$$

$$= |8| + |-8| \quad (1)$$

$$= 16 \text{ FE.} \quad (1)$$

c) $A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}(f(u) - g(u)) \cdot (2 - u) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{8}u^3 - \frac{3}{4}u^2 - \frac{1}{2}u + 3) \cdot (2 - u)$

$= -\frac{1}{16}u^4 + \frac{1}{2}u^3 - \frac{1}{2}u^2 - 2u + 3 \Rightarrow A'(u) = -\frac{1}{4}u^3 + \frac{3}{2}u^2 - u - 2$ (3)

Maximum: ($A'(u)=0$ ergibt Gleichung 3. Grades $\Rightarrow$ Probieren)

$u_1 = 2 - \sqrt{8}$ (relatives Maximum) (1)

$u_2 = 2$ (relatives Minimum) (1)

$u_3 = 2 + \sqrt{8}$ (außerhalb des zulässigen Bereiches) (1)

Randwerte: $A(-2) = 0$, $A(2)$ ist rel. Minimum $\Rightarrow$ abs. Maximum bei $u_1 = 2 - \sqrt{8}$ mit $A(2 - \sqrt{8}) = 4$. (3)

Aufgabe 7. Kurvenuntersuchung Optimierungsaufgabe, Integration (24)

Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f mit dem Schaubild K gegeben durch $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 + 6x^2 - 24)$.

a) Untersuchen Sie das Schaubild K auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K im Bereich $-6{,}5 \le x \le 2{,}5$ mit 1 LE = 1cm. (7)

b) Die Gerade g mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$ und das Schaubild K begrenzen zwei Flächenstücke. Berechnen Sie deren Gesamtinhalt. (7)

c) Für $-2 \le u \le 2$ schneidet die Gerade mit der Gleichung x = u das Schaubild im Punkt A und die Gerade aus Teilaufgabe b) im Punkt B. Der Punkt $C(-2|-1)$ bildet mit den Punkten A und B ein Dreieck. Für welchen Wert von u wird das Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal? (10)

Lösungen

a) Ableitungen: $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 + 6x^2 - 24)$, $f'(x) = \frac{1}{8}(3x^2 + 12x)$ und $f''(x) = \frac{1}{8}(6x + 12)$ (1,5)

Extrema: (f'(x) = 0 und f''(x) </> 0) $T(-4|1)$ und $H(0|-3)$ (3)

Wendepunkt: ($f''(x)=0$ mit VZW bzw. $f'''(x)\neq 0$) $W(-2|-1)$ (1,5)

Wertetabelle und Schaubild: (vgl. Gruppe A) (1)

b) Schnittpunkte von g und K: Entweder rechnerisch durch Gleichsetzen g(x) = f(x) (ergibt Gleichung 3. Grades ⇒ Probieren) oder durch ablesen der Punkt aus dem Schaubild und Punktprobe: $x_1 = 23$, $x_2 = -6$, $x_3 = -2$ (1)

$$A = \left|\int_{-2}^{2} f(x) - g(x)\ dx\right| + \left|\int_{2}^{6} f(x) - g(x)\ dx\right| \quad (1)$$

$$= \left|\int_{-6}^{-2}\left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 3\right)dx\right| + \left|\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 3\right)dx\right| \quad (1)$$

$$= \left|\left[\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 3x\right]_{-6}^{-2}\right| + \left|\left[\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 3x\right]_{-2}^{2}\right| \quad (1)$$

$$= \left|(\frac{1}{2} - 2 - 1 + 6) - (\frac{81}{2} - 54 - 9 + 18)\right| + \left|(\frac{1}{16} + 2 - 1 - 6) - (\frac{1}{16} - 2 - 1 + 6)\right| \quad (1)$$

$$= |8| + |-8| \quad (1)$$

$$= 16 \text{ FE.} \quad (1)$$

c) $A(u) = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}(g(u) - f(u))\cdot(2 + u) = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{8}u^3 - \frac{3}{4}u^2 + \frac{1}{2}u + 3)\cdot(2 + u) = -\frac{1}{16}u^4 - \frac{1}{2}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + 2u + 3 \Rightarrow A'(u) = -\frac{1}{4}u^3 - \frac{3}{2}u^2 - u + 2$ und $A''(u) = -\frac{3}{4}u^2 - 3u - 1$ (3)

Maximum: (A'(u)=0 ergibt Gleichung 3. Grades ⇒ Probieren): $u_1 = -2+\sqrt{8}$ (relatives Maximum), $u_2 = -2$ (relatives Minimum) und $u_3 = -2-\sqrt{8}$ (außerhalb des zulässigen Bereiches) (3)

Randwerte: $A(-2)$ ist rel. Minimum, $A(2) = 0 \Rightarrow$ abs. Maximum bei $u_1 = -2+\sqrt{8}$ mit maximaler Fläche $A(-2+\sqrt{8}) = 4$. (1)

Aufgabe 8: Kurvenuntersuchung, Extremwertaufgabe, Integration (30)

a) Untersuche $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$ auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Extrem- sowie Wendepunkte und skizziere ihren Graphen mit allen wesentlichen Punkten.

b) In den Raum zwischen der x-Achse und dem Teil des Graphen von f, der die Extremalpunkte enthält, soll ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt eingepasst werden. Berechne die Eckpunkte dieses Rechtecks.

c) Wieviel Prozent des gesamten Zwischenraums nimmt das Rechteck aus b) ein?

Lösungen:

a) Symmetrie zur y-Achse, da $f(-x) = f(x)$ oder. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$ enthält nur gerade Exponenten (1)

$S_y(0|4)$ (1)

$f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2(x+2)^2 \Rightarrow T_{1/2}(\pm 2|0)$ (2)

(doppelte Nullstellen $\Rightarrow$ Berührpunkte und insbesondere Tiefpunkte, da $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, siehe unten)

Ableitungen: $f'(x) = x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$, $f''(x) = 3x^2 - 4$ (und $f'''(x) = 6x$) (2)

Hochpunkt $H(0|4)$, da $f'(0) = 0$ und $f''(0) = -4 < 0$ oder mit VZW von + nach − (1)

Tiefpunkte $T_{1/2}(\pm 2|0)$, da $f'(\pm 2) = 0$ und $f''(\pm 2) = 2 > 0$ oder wie oben oder mit VZW (2)

Wendepunkte $W_{1/2}(\pm\sqrt{\frac{4}{3}} \,|\, \frac{16}{9})$, da $f'(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}) = 0$ und $f''(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}) = 6\sqrt{\frac{4}{3}} \neq 0$ oder mit VZW (3)

Beschriftete Skizze (3)

b) Das Rechteck mit den Eckpunkten $A(-u|0)$, $B(u|0)$, $C(u|f)u)$ und $D(-u|f(-u)$ mit $0 \le u \le 2$ (2)

Flächeninhalt $A(u) = 2u \cdot f(u) = \frac{1}{2}u^5 - 4u^3 + 8u$ mit $A'(u) = \frac{5}{2}u^4 - 12u^2 + 8 = \frac{5}{2}(u^4 - \frac{24}{5}u^2 + \frac{16}{5})$ (2)

$A'(u) = 0$ für $u^2 = \frac{12}{5} \pm \frac{8}{5} \Leftrightarrow u_{1I2} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$ und $u_{3I4} = \pm 2$. (1)

u_2 und u_4 sind negativ und liegen ausserhalb des betrachteten Bereiches. (1)

In $u_3 = 2$ wird die Fläche minimal mit $A(2) = 0$ (1)

Das absolute und relative Maximum muss also bei $u_1 = \sqrt{\frac{4}{5}}$ liegen mit $f(\sqrt{\frac{4}{5}}) = \frac{64}{25}$. (1)

Das Rechteck hat die Eckpunkte $(\pm\sqrt{\frac{4}{5}}\,|0)$ und $(\pm\sqrt{\frac{4}{5}}\,|\,\frac{64}{25})$ (1)

c) Der Flächeninhalt des Rechtecks aus b) ist $A(\sqrt{\frac{4}{5}}) = \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \frac{128}{25}$ FE. (1)

Der Flächeninhalt des gesamten Zwischenraums ist

$A_0 = 2\int_0^2 f(x)dx = 2\left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 4x\right]_0^2 = 2(\frac{8}{5} - \frac{16}{3} + 8) = \frac{128}{15}$ FE. (3)

Der Anteil von A betragt $\frac{A}{A_0} = \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \frac{128}{25} \cdot \frac{15}{128} = \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \frac{3}{5} \approx 53{,}66$ % (2)

Aufgabe 9: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Ortskurve, Optimierungsaufgabe, Integration (24)

Gegeben ist $f_t(x) = \frac{1}{9}x^3 + \frac{t}{3}x^2 - t^2x + 3t^2 - 3t - 3$ mit $x \varepsilon \mathbb{R}$ und $t \varepsilon \mathbb{R}^*_+$. Das Schaubild von f_t heißt K_t.

a) Untersuchen Sie K_1 auf Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K_1 für $-4 \le x \le 4$ mit 1 LE = 1cm. (10)

b) Bestimmen Sie die Ortskurve des Hochpunktes von K_t. (6)

c) Die Senkrechte $x = u$ mit $-3 \le x \le 3$ schneidet K_1 in R und die x-Achse in P. K_1 schneidet die positive x-Achse in Q. Berechnen Sie dien maximalen Flächeninhalt, den das Dreieck PQR annehmen kann. (6)

Lösung

a) Ableitungen: $f_1(x) = \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x - 3$, $f_1'(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 1$ und $f_1''(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ (2)

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0|-3)$ (0,5)

Schnittpunkte mit der x-Achse ($f_1(x) = \frac{1}{9}(x-3)(x+3)^2 \Rightarrow S_{x1}(3|0)$ und $S_{x2/3}(-3|0)$ (doppelt) (2,5)

Extrema: ($f_1'(x) = 0$ und $f_1''(x)$ </> 0) $T(1|-\frac{32}{9})$ und $H(-3|0)$ (4)

Wendepunkte: ($f_1''(x) = 0$ mit VZW) $W(-1|-\frac{16}{9})$ (3)

Skizze (1)

b) Ableitungen: $f_t'(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2t}{3}x - t^2$ und $f_t''(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2t}{3} \Rightarrow$ (2)

Hochpunkte ($f_t'(x) = 0$ und $f_t''(x) < 0$) $H(--t|3t^3 + 3t^2 - 3t - 3)$ (3)

$\Rightarrow$ Ortskurve $y = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + x - 3$ (1)

c) $A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (3-u) \cdot (0 - f(u)) = \frac{1}{18}(u^4 - 18u^2 + 81) \Rightarrow A'(u) = \frac{1}{18}(4u^3 - 36u)$ (3)

relatives Maximum ($A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$) bei $u = 0$ mit $A(0) = 4{,}5$ FE. (2)

Bereichsgrenzen $A(-3) = A(3) = 0 \Rightarrow$ absolutes Maximum bei $u = 0$. (2)

Aufgabe 10: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Ortskurve, Optimierungsaufgabe, Integration (24)

K ist das Schaubild der Funktion f_t.mit $f_t = -\frac{x^2}{t^2}(x - 3t)$ mit $x \varepsilon \mathbb{R}$ und $t \varepsilon \mathbb{R}^*_+$.

a) Untersuchen Sie K_2 auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K_2 für $-1 \le x \le 6$ mit 1 LE = 1 cm. (10)

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte von K_t. (6)

c) Die Senkrechte $x = u$ schneidet K_2 in P und die x-Achse in R. Gegeben ist außerdem der Punkt Q(0|6). Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt, den das Dreieck PQR annehmen kann. (8)

Lösung

a) $f_2(x) = -\frac{1}{4}x^2(x-6) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$, $f_2'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$, $f_2''(x) = -\frac{3}{2}x + 3$, $f_2'''(x) = -\frac{3}{2}$ (2)

Schnittpunkte mit der x-Achse: ($f(x)=0$) $N_{1/2}(0|0)$ (doppelte NST $\Rightarrow$ Berührpunkt) und $N_3(6|0)$ (1)

Hoch- und Tiefpunkte: ($f'(x)=0$, $f''(x) </> 0$) T(0|0) und H(4|8) (4)

Wendepunkte: ($f''(x)=0$, $f''' \neq 0$ oder VZW von $f''(x)$) W(2|4) (2)

Wertetabelle und Schaubild: (1)

b) $f'_t(x) = -\frac{3}{t^2}x^2 + \frac{6}{t}x$, $f''_t(x) = -\frac{6}{t^2}x + \frac{6}{t}$ (2)

Hochpunkt: ($f'_t(x) = 0$ und $f''_t(x) < 0$) H(2t|4t) (3)

$\Rightarrow$ Ortskurve der Hochpunkte $y = 2x$ (1)

c) $A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = (6-u) \cdot f_2(u) = \frac{1}{8}u^2(u-6)^2$, (2)

$A'(u) = \frac{1}{2}u \cdot (u-6) \cdot (u-3)$, $A''(u) = \frac{3}{2}(u^2 - 6u + 6)$ (2)

rel. Max ($A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$) bei $u = 3$. (2)

Bereichsgrenzen: $A(0) = A(6) = 0 \Rightarrow$ abs Max bei $u = 3$ mit $A(3) = \frac{81}{8}$ FE. (2)

Aufgabe 11: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Ortskurve, Optimierungsaufgabe (26)

Für jedes $t \in \mathbb{R}^*_+$ sind die Funktionen f_t und g_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{2t}x^4 - t^2x^2$ und $g_t(x) = (\frac{5}{2t} - t^2)x^2 - \frac{2}{t}$. Das Schaubild von f_t ist K_t, das Schaubild von g_t ist G_t.

a) Untersuchen Sie das Schaubild K_t auf Symmetrie, Schnittpunkte mit der x-Achse, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K_1 und G_1 im Bereich $-2 \le x \le 2$ mit 1 LE = 2 cm. (11)

b) In den Raum, der zwischen K_1 und G_1 liegt, soll ein Rechteck maximaler Fläche eingepasst werden, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte dieses Rechteckes auf zwei Nachkommastellen gerundet an. (9)

c) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K_t und G_t. Für welches t wird der Abstand der beiden rechten Schnittpunkte minimal? Hinweis: Dieses Extremwertproblem lässt sich lösen **ohne** dabei irgendwelche Ableitungen zu bilden! (6)

Lösungen:

a) Ableitungen: $f_t'(x) = \frac{2}{t}x^3 - 2t^2x$, $f_t''(x) = \frac{6}{t}x^2 - 2t^2$ und $f'''_t(x) = \frac{12}{t}x$ (2)

Symmetrie: f_t ist eine gerade Funktion, also symmetrisch zur y-Achse. (1)

Schnittpunkte mit der x-Achse $N_{1/2}(0|0)$ (doppelte NST $\Rightarrow$ Berührpunkt) und $N_{3/4}(\pm\sqrt{2t^3}\,|0)$ (2)

Extrempunkte ($f_t'(x) = 0$ und $f_t''(x) \neq 0$): H(0|0) und $T_{1/2}(\pm\sqrt{t^3}\,|-\frac{1}{2}t^5)$ (4)

Wendepunkte ($f_t''(x) = 0$ mit VZW): $W_{1/2}(\pm\sqrt{\frac{t^3}{3}} \mid -\frac{5}{18}t^5)$ (3)

Schaubild (zusätzliche Werte: $f_1(\pm 2) = 4$) (1)

b) Aus der Zeichnung lässt sich erkennen, dass von den Zwischenräumen in den Bereichen $-2 \le x \le -1$, $-1 \le x \le 1$ und $1 \le x \le 2$ der mittlere Bereich $-1 \le x \le 1$ deutlich größer ist als die beiden anderen. Es bietet sich daher an, die folgenden Eckpunkte mit $0 \le x \le 1$ zu wählen:

$A(u|g(u))$

$B(u|(f(u))$

$C(u|(f(-u)) = C(-u|f(u)$

$D(u|(g(-u)) = D(-u|g(u)$

(2)

$A(u) = b\cdot h = [u - (-u)]\cdot[f_1(u) - g_1(u)] = 2u\cdot[0,5u^4 - 2,5u^2 + 2] = u^5 - 5u^3 + 4u \Rightarrow A'(u) = 5u^4 - 15u^2 + 4$ und $A''(u) = 20u^3 - 30u \Rightarrow$ Relatives Maximum ($A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$): $0 = 5u^4 - 15u^2 + 4 \Leftrightarrow 0 = u^4 - 3u^2 + 0,8 \Leftrightarrow 0 = z^2 - 3z + 0,8 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{29}{20}} \Rightarrow u_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{29}{20}}} \approx \pm 1,64$ und $u_{3/4} = \pm\sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{29}{20}}} \approx \pm 0,54$. Nur $u_3 \approx 0,54$ liegt im gewünschten Bereich! $A''(0,54) \approx -15,4 < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum (Hochpunkt). Bereichsgrenzen: $A(0) = 0$, $A(0,54) \approx 1,41$ und $A(1) = 1 \Rightarrow$ absolutes Maximum bei $u_3 \approx 0,54$ y-Koordinaten: $f_1(0,54) \approx -0,21$ und $g_1(0,54) \approx -1,56 \Rightarrow$ Eckpunkte: $A(0,54|-0,21)$, $B(-0,54|-0,21)$, $C(-0,54|-1,56)$ und $D(0,54|-1,56)$. (7)

c) Punkte $A(1 \mid \frac{1}{2t} - t^2)$ und $B(2 \mid \frac{8}{t} - 4t^2) \Rightarrow$ Abstand $d(t) = \sqrt{1 + (\frac{15}{2t} - 3t^2)^2}$ mit $t > 0$.

Ansatz 1:

Da die Wurzelfunktion streng monoton steigend ist, genügt es, das Minimum von $d^2(t) = 1 + (\frac{15}{2t} - 3t^2)^2$ zu suchen: Ist $d^2(t)$ an der Stelle t_0 minimal, so besitzt auch $d(t)$ dort ein relatives Minimum. $(d^2(t)') = 2(\frac{15}{2t}3t^2)(-\frac{15}{2t^2} - 6t) = 0 \Leftrightarrow \frac{15}{2t} - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ mit $d(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}) = 1$. ($t > 0$!). Randwerte: Da $d(t)$ für $t \to 0$ (wegen $\frac{15}{2t}$) und für $t \to \infty$ (wegen $3t^2$) gegen ∞ strebt, ist an dieser Stelle auch das absolute Minimum.

Ansatz 2:

$\sqrt{1 + (\frac{15}{2t} - 3t^2)^2}$ erreicht sein absolutes Minimum, wenn $\frac{15}{2t} - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$.

Aufgabe 12: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Ortskurve, Tangente (24)

Für jedes $t \varepsilon \mathbb{R}$ ist die Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = -x^3 + (t-2)x^2 + (2t-1)x + t$. Ihr Schaubild heißt K_t.

a) Untersuchen Sie K_2 auf Achsenschnittpunkte, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K_2 für $-2 \le x \le 2$ mit 1 LE = 2 cm. (10)

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an K_2 im Punkte $P(0,5|f_2(0,5))$. Zeigen Sie, dass der Tiefpunkt von K_2 auf dieser Tangenten liegt. Q sei ein vom Hochpunkt $H(1|4)$ verschiedener Punkt auf K_2. Bestimmen Sie die Koordinaten von Q so, dass die Tangente an K_2 in Q durch H geht. (7)

c) Zeigen Sie, dass K_t die x-Achse in $A(-1|0)$ berührt. Für welche Werte von t ist A
Hochpunkt
Tiefpunkt
Wendepunkt von K_t?

d) Es sei $t \le 0$. Auf dem Schaubild K_t liegen die Punkte $R(t|0)$ und $S(0|t)$. Der Ursprung $O(0|0)$ und die Punkte R und S bilden Sie Eckpunkte eines Dreieckes mit dem Flächeninhalt $A_1(t)$. Die Koordinatenachsen und K_t begrenzen im 1. Quadranten eine Fläche mit dem Inhalt $A_2(t)$. Für welchen Wert von t gilt $A_1(t) : A_2(t) = 1 : 3$?

Aufgabe 13: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Ortskurve, Optimierungsaufgabe (24)

Gegeben ist die Funktion f_t durch $f_t(x) = \frac{t^2}{16}x^4 + \frac{t}{2}x^3$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}^*_+$. Das Schaubild von f_t heißt K_t.

a) Untersuchen Sie K_3 auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K_3 für $-3 \leq x \leq 1$ mit 1 LE = 1cm. (10)

b) Untersuchen Sie K_t auf Extrempunkte und zeigen Sie, dass K_t keinen Hochpunkt besitzt. Bestimmen Sie die Ortskurve des Tiefpunktes von K_t. (8)

c) Die Senkrechte $x = u$ mit $-\frac{8}{3} \leq u \leq 0$ schneidet K_3 in P und die x-Achse in Q Für welches u ist der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ maximal? (5)