5.5. Abstrakte Abituraufgaben zu rationalen Funktionen

Aufgabe 1: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Integration, Rotationsvolumen (16)

Gegeben sind die Funktionen $f_t(x) = \frac{2x-t}{x^3}$. Ihre Schaubilder heißen K_t.

a) Untersuchen Sie K_t in Abhängigkeit von $t > 0$ auf Asymptoten sowie Achsenschnittpunkte und skizzieren Sie K_2. (4)
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes von K_t in Abhängigkeit von $t > 0$. Für welches t liegt er an der Stelle $x = 3$? (4)
c) Bestimmen Sie den Inhalt A_s der Fläche, die von K_2, der x-Achse und der Senkrechten bei $x = s > 1$ begrenzt werden. Für welches s ist diese Fläche $\frac{1}{4}$FE groß? Wie verhält sich der Flächeninhalt A_s, wenn s gegen Unendlich strebt? (4)
d) Bestimmen Sie das Volumen der Spindel, die durch das durch den im Bereich $1 < x < \infty$ um die x-Achse rotierende Schaubild K_2 gebildet wird. (4)

Lösung

a) Skizze (1)

$S_{x1}(\frac{t}{2} \mid 0)$, da NST nur im Zähler (1)

senkrechte Asymptote mit VZW bei x = 0, da dreifache NST nur im Nenner (1)

waagrechte Asymptote y = 0, da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x-t}{x^3} = 0$ (1)

b) $f_t'(x) = -\frac{4}{x^3} + \frac{3t}{x^4} = \frac{3t-4x}{x^4} \Rightarrow H(\frac{3t}{4} \mid \frac{32}{27t^2})$, da VZW der Ableitung von + nach − (3)

Für t = 4 liegt der Hochpunkt an der Stelle $x = \frac{3\cdot 4}{4} = 3$ (1)

c) $A_s = \int_1^s (\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3})dx = \left[-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right]_1^s = 1 - \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{4}$ für s = 2 (3)

$\lim\limits_{s\to\infty} A_s = \lim\limits_{s\to\infty} (1 - \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}) = 1$ FE (1)

d) $V = \pi \lim\limits_{s\to\infty} \int_1^s \left(\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)^2 dx = \lim\limits_{s\to\infty} \left[-\frac{4}{5x^5} + \frac{4}{3x^6} - \frac{4}{7x^7}\right]_1^s = \frac{4}{105}$ VE (4)

Aufgabe 2: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Integration (12)

Gegeben sind die Funktionen $f_t(x) = \frac{4x-t}{x^3}$. Ihre Schaubilder heißen K_t.

a) Untersuchen Sie K_t in Abhängigkeit von $t > 0$ auf Asymptoten sowie Achsenschnittpunkte und skizzieren Sie K_4. (4)
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes von K_t in Abhängigkeit von $t > 0$. Für welches t liegt er an der Stelle $x = 3$? (4)
c) Bestimmen Sie den Inhalt A_s der Fläche, die von K_4, der x-Achse und der Senkrechten bei $x = s > 1$ begrenzt werden. Für welches s ist diese Fläche $\frac{1}{2}$FE groß? Wie verhält sich der Flächeninhalt A_s, wenn s gegen Unendlich strebt? (4)

Lösung

a) Skizze (1)

$S_{x1}(\frac{t}{4} \mid 0)$, da NST nur im Zähler (1)

senkrechte Asymptote mit VZW bei x = 0, da dreifache NST nur im Nenner (1)

waagrechte Asymptote y = 0, da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x-t}{x^3} = 0$ (1)

b) $f_t'(x) = -\frac{8}{x^3} + \frac{3t}{x^4} = \frac{3t-8x}{x^4} \Rightarrow H(\frac{3t}{8} \mid \frac{64}{3t^2})$, da VZW der Ableitung von + nach − (3)

Für t = 8 liegt der Hochpunkt an der Stelle $x = \frac{3\cdot 8}{8} = 3$ (1)

c) $A_s = \int_1^s (\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3})dx = \left[-\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right]_1^s = 2 - \frac{4}{s} + \frac{2}{s^2} = \frac{1}{2}$ für s = 2 (3)

$\lim\limits_{s\to\infty} A_s = \lim\limits_{s\to\infty} (2 - \frac{4}{s} + \frac{2}{s^2}) = 2$ FE (1)

Aufgabe 3: Kurvenuntersuchung mit Parameter, Tangente, Integration (7)

Für jedes t > 0 ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{200tx}{(x^2+t^2)^2}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild heißt K_t.

a) Skizzieren Sie K_4 und K_5 in einem Koordinatensystem. (2)

b) K_4 und K_5 schließen im ersten Quadranten eine Fläche ein. Diese wird durch die Tangente im Hochpunkt von K_5 in Teilflächen zerlegt. Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der oberen Teilfläche an der Gesamtfläche. (5)

Lösung

a) Skizze (2)

b) Der Hochpunkt von K_4 ist $H_4(2{,}89 \mid 2{,}60)$ und die Tangente durch H_4 schneidet K_5 in $S_1(0{,}92 \mid 2{,}60)$ und $S_2(4{,}69 \mid 2{,}60)$. K_4 und K_5 schneiden sich in $S_3(0 \mid 0)$ und $S_4(7{,}76 \mid 1{,}07)$. Die gefragten Flächeninhalte sind also $A_{ges} \approx \int_0^{7,76} (f_4(x) - f_5(x))dx \approx 5{,}62$ FE und $A_{oben} = \int_{0,92}^{4,69} (f_4(x) - 2{,}60)dx \approx 3{,}41$ FE ≈ 60,7 % von A_{ges}.(5)

Aufgabe 4: Kurvenuntersuchung, Integration, Extremwertaufgabe mit Zylindervolumen (12)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$ mit $x \neq 0$. Ihr Schaubild sei K.

a) Untersuchen Sie K auf Symmetrie, Schnittpunkt mit der x-Achse und Asymptoten. Zeichnen Sie K und die Asymptoten im Bereich $-4 \le x \le 4$. (4)

b) Die Geraden x = 1 und x = t mit t > 1, die x-Achse und die waagrechte Gerade y = 4 bilden ein Rechteck. k teilt dieses Rechteck in zwei Teilflächen mit den Flächeninhalten A_1 und A_2. Bestimmen Sie t so, dass $A_1 = A_2$. (4)

c) P(u|v) sei ein Punkt auf K. Zusammen mit den Punkte Q(u|4), R(0|4) und S(0|v) bildet P ein weiteres Rechteck. Bei der Rotation dieses Rechtecks um die y-Achse entsteht ein Zylinder. Für welchen Wert von u ist die Oberfläche des Zylinders minimal? (4)

Lösung

a) Symmetrie zur y-Achse, da f(−x) = f(x) (0,5)

Achsenschnittpunkte $S_{x1/1}(\pm 1 \mid 0)$ (0,5)

Senkrechte Asymptote ohne VZW x = 0, da doppelte NST nur im Nenner (1)

Waagrechte Asymptote y = 4 , da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 4 - \frac{4}{x^2} = 4 - 0 = 4$ (1)

Zeichnung (1)

b) Gesamtfläche A(t) = 4(t − 1) (0,5)

Teilfläche $A_1(t) = \int_1^t (4 - \frac{4}{x^2})dx = \left[4x + \frac{4}{3x}\right]_1^t = 4t + \frac{4}{t} - 8$ (1,5)

$A_1(t) = \frac{1}{2}A(t) \Leftrightarrow 4t + \frac{4}{t} - 8 = 2t - 2 \Leftrightarrow 2t^2 - 6t + 4 = 0 \Leftrightarrow t \in \{1; 2\}$, sinnvoll ist nur t = 2 (2)

c) Oberfläche $O(u) = 2\pi u^2 + \frac{8\pi}{u}$ mit u > 0 und $O'(u) = 4\pi u - \frac{8\pi}{u^2} = 4\pi(u - \frac{2}{u^2})$ (3)

$\Rightarrow$ Minimum für $u = \sqrt[3]{2}$ (1)