5.5. Prüfungsaufgaben zur graphischen Integration und Differentiation

Aufgabe 1: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (5)

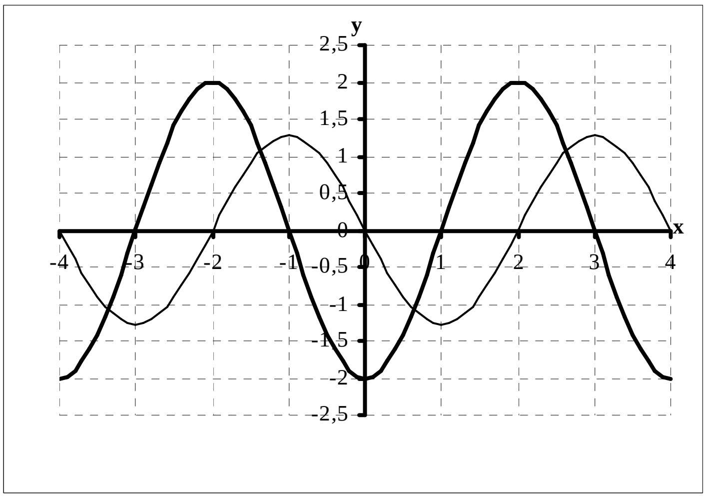
a) Bestimmen Sie die Periode p sowie die Nullstellen der Funktion $f(x) = 2\cdot\sin\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]$ (2)

b) Skizzieren Sie das Schaubild von f(x) im Bereich [0; p]. (1)

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Integralfunktion $J_0(x) = \int_0^x f(t)dt$ in das Koordinatensystem aus a). (2)

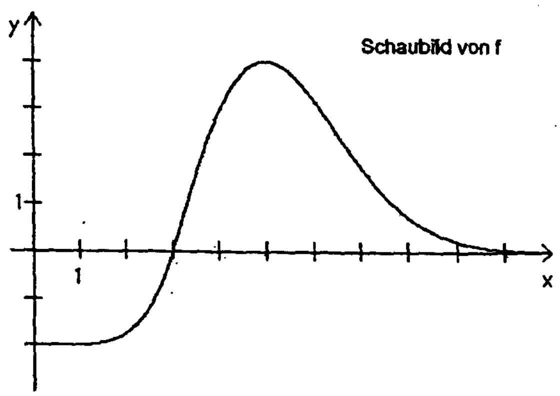
Lösung

a) $p = 4 \Rightarrow$ NST $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$
b), c):



Aufgabe 2 (5)
Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f. Die Funktion F ist die Stammfunktion von f. Geben Sie für jeden der folgenden Sätze an, ob er wahr, falsch oder nicht entscheidbar ist. Begründen Sie ihre Antworten.

a) F(3) = 0
b) Das Schaubild von F hat keinen Wendepunkt.
c) F besitzt mindestens ein Minimum.
d) F(10) < F(5)

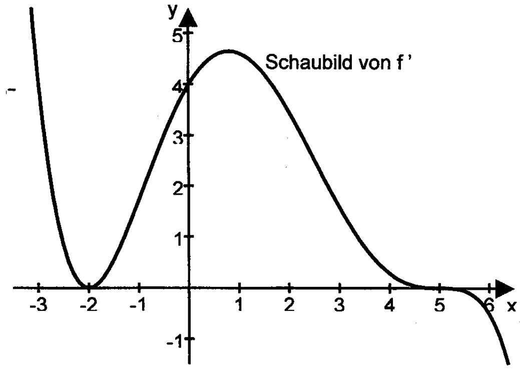


Lösung

a) unentscheidbar, da F in y-Richtung verschiebbar ist.
b) falsch, denn das Maximum von f bei $x \approx 5$ ist ein Wendpunkt von F.
c) richtig, denn bei $x \approx 3$ durchläuft f einen VZW von − nach +
d) falsch, denn f(x) > 0 und daher F monoton steigend für x > 2.

Aufgabe 3 (5)
Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. Geben Sie für jeden der folgenden Sätze an, ob er wahr, falsch oder nicht entscheidbar ist. Begründen Sie ihre Antworten.

a) Das Schaubild von f hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.
b) Das Schaubild von f hat für $-3 \leq x \leq 6$ genau zwei Wendepunkte.
c) Das Schaubild von f verläuft im Schnittpunkte mit der y-Achse steiler als die erste Winkelhalbierende.
d) f(0) > f(5)



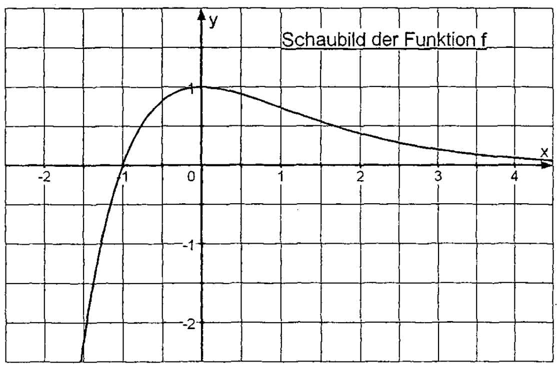
Lösung

a) falsch, dort ist ein Tiefpunkt von f’ und damit ein Wendepunkt (wegen f’(−2) = 0 sogar ein Sattelpunkt) von f.
b) richtig, denn bei x = −2 und x = 1 besitzt f’ zwei Extrempunkte.
c) richtig, denn die Steigung f’(0) = 4 > 1.
d) falsch, denn f’(x) > 0 für −2 < x < 5 und daher ist f in diesem Bereich monoton steigend.

Aufgabe 4 (4)

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f.
F ist eine Stammfunktion von f.

a) Bestimmen Sie die Extrem- und Wendestellen von F
b) Wo hat das Schaubild von F im Bereich $-1{,}5 \le x \le 3$ Tangenten mit positiver Steigung?
c) Das Schaubild von F geht durch den Punkt P(−1|0) Skizzieren das Schaubild von F.



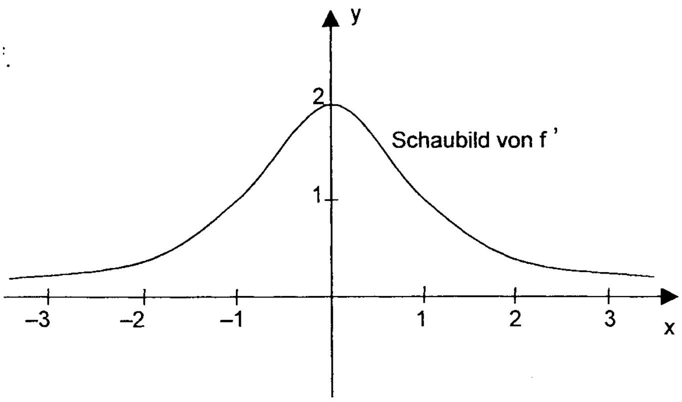
Lösung:

a) F hat TP bei x = 1, da VZW bei f’ von − nach +. F hat WP bei x = 0, da dort Maximum von f’ (2)
b) Für x > 1 ist f’(x) > 0 und F hat in diesem Bereich folglich Tangenten mit positiver Steigung. (1)
c) Skizze: (1)

Aufgabe 5 (6)

Das Schaubild zeigt das Schaubild der Ableitung f’ einer Funktion f. Sind folgenden Aussagen über die Funktion f wahr, falsch oder nicht entscheidbar? Begründen Sie ihre Antwort.

1. f ist streng monoton wachsend für −3 < x < 3.
2. Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendepunkt.
3. Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.
4. Es f(x) > 0 für alle x ∈ [−3; 3].



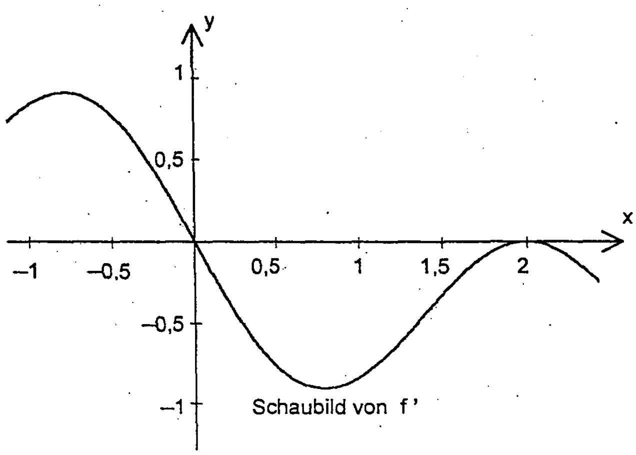
Lösung

1. ja, da f’ für −3 < x < 3 positiv ist.
2. ja, und zwar bei $x_0 = 0$, da die Steigung f’ an dieser Stelle maximal wird.
3. nein wegen 1.
4. nicht entscheidbar, da die Stammfunktion f nur bis auf eine Konstante bestimmt ist.

Aufgabe 6 (6)

Das Schaubild zeigt das Schaubild der Ableitung f’ einer Funktion f. Sind folgenden Aussagen über die Funktion f wahr, falsch oder nicht entscheidbar? Begründen Sie ihre Antwort.

1. An der Stelle 0 hat das Schaubild von f einen Hochpunkt.
2. Für $0 \le x \le 2$ ist $f(x) \neq 0$.
3. Das Schaubild von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
4. An der Stelle 2 hat das Schaubild von f einen Wendepunkt.

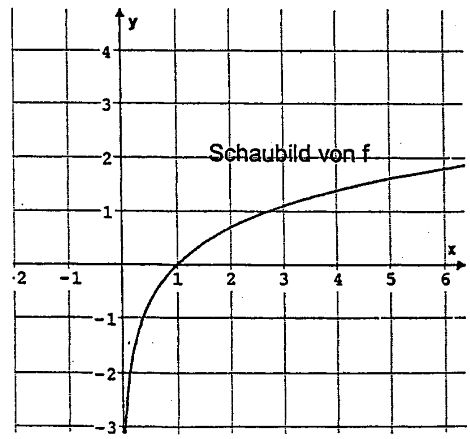


Lösung

1. ja, da f’ von + (f monoton steigend) zu − (f monoton fallend) übergeht.
2. nicht entscheidbar, da die Stammfunktion f nur bis auf eine Konstante bestimmt ist.
3. nein wegen 1.
4. ja, da die Steigung f’ an dieser Stelle maximal wird.

Aufgabe 7 (4)
Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, falsch oder unentscheidbar? Begründen Sie ihre Antworten.

a) $f(1) < f'(1)$
b) $f'(1) < f''(1)$

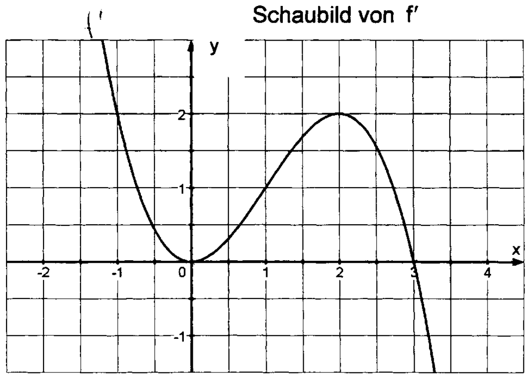


Lösung

a) wahr, denn $f(1) = 0 < f'(1)$, da f streng monoton steigt. (2)
b) falsch, denn $f'(1) > 0$ (siehe a)) und $f''(1) < 0$, da f rechts gekrümmt (2)

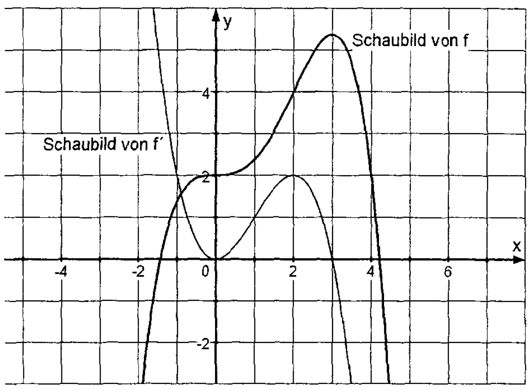
Aufgabe 8 (5)
Gegeben ist das Schaubild der Ableitung f' der Funktion f.

a) Welche Ausagen über die Funktion f ergeben sich daraus im Hinblick auf Monotonie, Extremstellen und Wendestellen? Begründen Sie Ihre Aussagen.
b) Es gilt $f(0) = 2$. Skizzieren Sie das Schaubild von f.

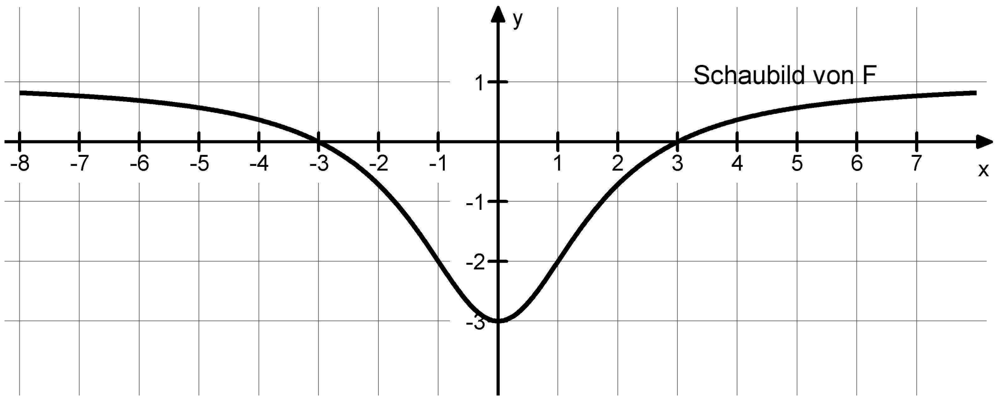


Lösung

a) f ist monoton steigend für $x < 3$, da dort $f'(x) \geq 0$ gilt. (1)
f ist monoton fallend für $x > 3$, da dort $f'(x) \leq 0$ gilt.
f hat an $x = 3$ ein lokales Maximum, da f' dort einen VZW von + nach − hat. (1)
f hat die Wendestellen $x = 0$ und $x = 2$, da f' an diesen Stellen lokale Extrema besitzt. (1)
b) siehe Skizze (2)



Aufgabe 9 (5)
Gegeben ist das Schaubild einer **Stammfunktion F** der Funktion f.



a) Geben Sie einen Näherungswert für f(3) an.

b) Bestimmen Sie das Integral $\int_1^3 f(x)dy$.

c) Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit und begründen Sie Ihre Antworten:
- $f(x) \geq 0$ für $0 < x < 7$
- f hat im Bereich $-3 < x < 0$ eine Extremstelle

Lösung

a) $f(3) = F'(3)$ = Steigung des Schaubildes in $x = 3 \approx 0{,}5$ (1)

b) $\int_1^3 f(x)dy = F(3) - F(1) = 0 - (-2) = 2$ (1)

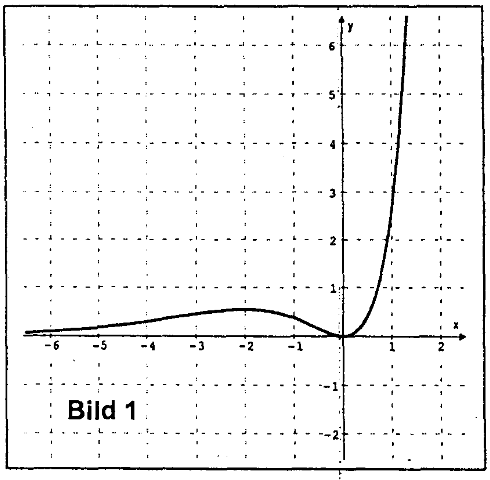
c) $f(x) \geq 0$ für $0 < x < 7$ stimmt, da F(x) in diesesm bereich monoton steigt und $f(x) = F'(x)$. (1,5)
$f(x) = F'(x)$ hat bei $x \approx -1{,}5$ einen Tiefpunkt, da F dort eine Wendestelle mit maximaler negativer Steigung besitzt. (1,5

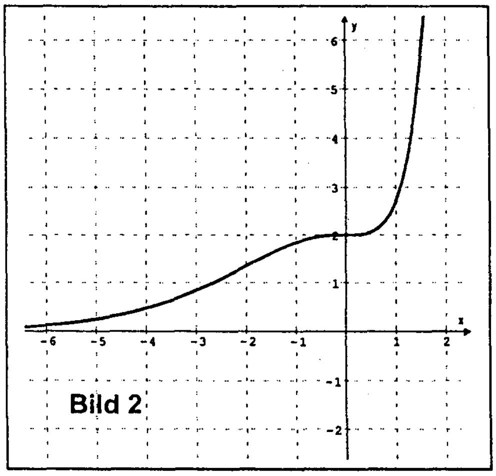
Aufgabe 10 (5)

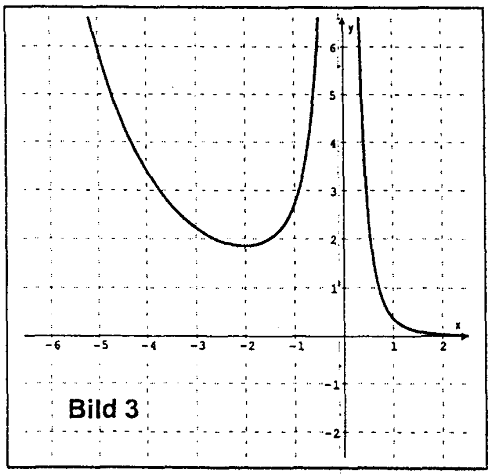
Gegeben sind die Schaubilder der Funktion f mit $f(x) = x^2e^x$, ihrer Ableitungsfunktion f', einer Stammfunktion F von f und er Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

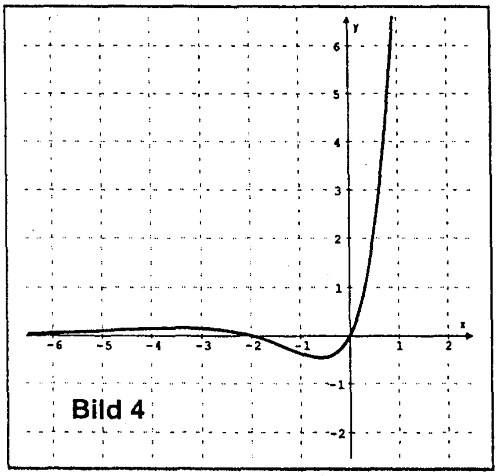
Begründen Sie, dass nur Bild 1 das Schaubild der Funktion f sein kann.

Ordnen Sie die Funktionen f', F und g den übrigen Schaubildern zu und begründen Sie.









Lösung

a) Die Funktion in Bild 1 hat eine doppelte Nullstelle bei $x = 0$ ($\Rightarrow$ Faktor x^2), verläuft nur im positiven Bereich ($x^2 \geq 0$ und $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$), strebt für $x \to -\infty$ gegen Null und für $x \to +\infty$ gegen ∞ (Exponentialfunktion mit Basis > 1). Es muss sich also um f handeln. (2)

b) Die Funktion in Bild 2 ist im ganzen Bereich monoton steigend. Die Steigung wächst an, geht dann zurück auf Null und wächst anschließend wieder sehr stark an. Der Verlauf der Steigung der Funktion in Bild 2 entspricht also Bild 1. Bild 2 zeigt also eine Stammfunktion F von f. (1)
Je kleiner die Funktionswerte in Bild 3, desto größer sind sie in Bild 1. Bild 3 zeigt also den Kehrwert g von f. (1)
Die Funktion in Bild 4 zeigt zunächst kleine positive Werte, geht bei $x = -2$ in den negativen Bereich, bei $x = 0$ in den positiven Bereich und wächst dann sehr starkan. Ihr Verlauf enspricht also der Steigung der Funktion f. Es muss sich also um die Ableitung f' handeln. (1)