

5.5. Prüfungsaufgaben zu Integrationsmethoden

Aufgabe 1: Substitutionsregel (2)

Geben Sie für die Funktion f eine Stammfunktion an.

a) $f(x) = \left(5 - \frac{3}{2}x\right)^4$

b) $f(x) = \left(5 - \frac{3}{4}x\right)^5$

c) $f(t) = 3 \cdot e^{-5t}$

d) $f(t) = 5 \cdot e^{-3t}$

Lösungen

a) $F(x) = -\frac{2}{15} \left(5 - \frac{3}{2}x\right)^5 \quad (2)$

b) $F(x) = -\frac{2}{9} \left(5 - \frac{3}{4}x\right)^6 \quad (2)$

c) $F_c(t) = -\frac{3}{5} \cdot e^{-5t} \quad (2)$

d) $F_c(t) = -\frac{5}{3} \cdot e^{-3t} \quad (2)$

Aufgabe 2: Substitutionsmethode

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx = [\ln(x+1)]_0^{e-1} = 1 - 0 = 1$

b) $\int_0^{19} \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^{19} = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

c) $\int_1^2 \sqrt{4+x} dx = \left[\frac{2}{3}(4+x)\sqrt{4+x}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(6\sqrt{6} - 5\sqrt{5})$

d) $\int_1^2 (1-2x)^3 dx = \left[\frac{1}{8}(1-2x)^4\right]_1^2 = 10$

e) $\int_1^2 (1-3x)^3 dx = \left[\frac{1}{12}(1-3x)^4\right]_1^2 = 50 \frac{3}{4}$

f) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{4-2x}} dx = \left[\sqrt{4-2x}\right]_{-1}^0 = 2 - \sqrt{6}$

g) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{4-3x}} dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{4-3x}\right]_{-1}^0 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{7}$

Aufgabe 3: Partielle Integration

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$a) \int_0^1 x \cdot e^x dx = \left[x \cdot e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1 \text{ FE}$$

$$b) \int_1^2 x \cdot e^{-3x} dx = \left[-\frac{1}{3} x \cdot e^{-3x} \right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{3} e^{-3x} dx = \frac{1}{3} e^{-3} - \frac{2}{3} e^{-6} - \left[\frac{1}{9} e^{-3x} \right]_1^2 = \frac{4}{9} e^{-3} - \frac{7}{9} e^{-6} \text{ FE}$$

$$c) \int_0^1 (2x+3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} dx = \left[-2 \cdot (2x-3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^1 - \int_0^1 -4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} dx = 6 - \frac{10}{\sqrt{e}} - \left[8 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^1 = 14 - \frac{18}{\sqrt{e}} \text{ FE}$$

$$d) \int_1^e x \cdot \ln x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} e^2 - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^e = \frac{1}{4} (e^2 - 1) \text{ FE}$$

$$e) \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[(\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \left[(\ln x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} \text{ FE}$$

$$f) \int_{1/2}^{e/2} \frac{\ln(2x)}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln(2x)}{x} \right]_{1/2}^{e/2} - \int_{1/2}^{e/2} -\frac{1}{x^2} dx = -\frac{2}{e} - \left[-\frac{\ln(2x)}{x} \right]_{1/2}^{e/2} = 2 - \frac{4}{e} \text{ FE}$$

$$g) \int_{1/4}^2 \left(\frac{1}{2} x + 2 \right) \cdot \ln(4x) dx = \left[\left(\frac{1}{4} x^2 + 2x \right) \cdot \ln(4x) \right]_{1/4}^2 - \int_{1/4}^2 \left(\frac{1}{4} x + 2 \right) dx = 5 - \left[\left(\frac{1}{8} x^2 + 2x \right) \right]_{1/4}^2 = 1 \frac{1}{128} \text{ FE}$$

$$h) \int_{-1}^0 \frac{x}{(x-4)^3} dx = \left[\frac{-2x}{(x-4)^2} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{-2}{(x-4)^2} dx = -\frac{2}{25} - \left[\frac{2}{x-4} \right]_{-1}^0 = -\frac{2}{25} + \frac{1}{10} = \frac{1}{50} \text{ FE}$$

$$i) \int_0^2 \frac{6t}{\sqrt{3t^2+4}} dt = \left[2\sqrt{3t^2+4} \right]_0^2 = 4$$

$$j) \int_0^1 \frac{t^2}{(1+5t^3)^2} dt = \frac{1}{15} \left[-\frac{1}{1+5t^3} \right]_0^1 = \frac{1}{18}$$

$$k) \int_0^1 t \cdot \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{3} (\sqrt{8} - 1)$$

Aufgabe 4: Rotationsvolumen (5)

Gegeben sind die Funktionen $f_t(x) = 20 \sqrt{\frac{x-t}{10}} - t$ für $x > t > 0$. Berechnen Sie auf zwei Nachkommastellen

genau das Volumen in Litern und das Gewicht in kg einer Salatschüssel aus Glas ($\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$), die durch die im Bereich $0 \leq x \leq 10$ um die x-Achse rotierenden Schaubilder von f_0 und $f_{0,5}$ begrenzt wird. (1 LE = 1 cm)

Lösung

$$V = V_a - V_i = \pi \int_0^2 (f_0(x))^2 dx - \pi \int_0^2 (f_{0,5}(x))^2 dx \approx 6,28 \text{ l} - 5,29 \text{ l} = 0,99 \text{ l} \Rightarrow m = \rho \cdot V = 2,47 \text{ kg} \quad (5)$$

Aufgabe 5: Rotationsvolumen (4)

- a) Die Schaubilder der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie ihren Inhalt
 b) Die Fläche aus Teil a) rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie den Inhalt des Rotationskörpers.

Lösung:

$$a) A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ FE}$$

$$b) V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{3}{10} \pi \text{ VE}$$

Aufgabe 6: Mittelwerte (3)

Bestimmen Sie den Mittelwert der Funktion $f(x) = 2x^2 - x$ im Intervall $[0; 2]$.

Lösung

$$\bar{m} = \frac{1}{2} \int_0^2 (2x^2 - x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 = \frac{5}{3} \quad (3)$$

Aufgabe 7: Mittelwerte (3)

Bestimmen Sie den Mittelwert der Funktion $f(x) = 3x^2 - x$ im Intervall $[0; 3]$.

Lösung

$$\bar{m} = \frac{1}{3} \int_0^3 (3x^2 - x) dx = \frac{1}{3} \left[x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^3 = \frac{15}{2} \quad (3)$$

Aufgabe 8: Näherungsverfahren (6)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 \frac{1}{4} x^3 dx$

- a) mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (2)
- b) mit der Sehnentrapezmethode für $n = 2$ Intervalle (2)
- c) mit der Keplerschen Faßregel für $n = 2$ Intervalle (2)

Lösung

$$\text{a) } \int_0^2 \frac{1}{4} x^3 dx = \left[\frac{1}{16} x^4 \right]_0^2 = 1 \quad (2)$$

$$\text{b) } \int_0^2 \frac{1}{4} x^3 dx \approx \frac{2}{4} \left(0 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \right) = 1,25 \quad (2)$$

$$\text{c) } \int_0^2 \frac{1}{4} x^3 dx \approx \frac{2}{6} \left(0 + 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \right) = 1 \quad (2)$$

Aufgabe 9: Näherungsverfahren (6)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^4 \frac{1}{4} x^3 dx$

- a) mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (2)
- b) mit der Sehnentrapezmethode für $n = 2$ Intervalle (2)
- c) mit der Keplerschen Faßregel für $n = 2$ Intervalle (2)

Lösung

$$\text{a) } \int_0^4 \frac{1}{4} x^3 dx = \left[\frac{1}{16} x^4 \right]_0^4 = 16 \quad (2)$$

$$\text{b) } \int_0^4 \frac{1}{4} x^3 dx \approx \frac{4}{4} (0 + 2 \cdot 2 + 16) = 20 \quad (2)$$

$$\text{c) } \int_0^4 \frac{1}{4} x^3 dx \approx \frac{4}{6} (0 + 4 \cdot 2 + 16) = 16 \quad (2)$$

Aufgabe 10: Näherungsverfahren (6)

Berechnen Sie das Integral $\int_1^5 \frac{1}{x^3} dx$

- a) mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (2)
- b) mit der Sehnentrapezmethode für $n = 2$ Intervalle (2)
- c) mit der Keplerschen Faßregel für $n = 2$ Intervalle (2)

Lösung

$$a) \int_1^5 \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^5 = \frac{12}{25} = 0,48 \quad (2)$$

$$b) \int_1^5 \frac{1}{x^3} dx \approx \frac{4}{4} \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{27} + \frac{1}{125} \right) = 1,08 \quad (2)$$

$$c) \int_1^5 \frac{1}{x^3} dx \approx \frac{4}{6} \left(1 + 4 \cdot \frac{1}{27} + \frac{1}{125} \right) = 0,77 \quad (2)$$

Aufgabe 11: Näherungsverfahren (6)

Berechnen Sie das Integral $\int_2^6 \frac{1}{x^3} dx$

a) mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (2)

b) mit der Sehnentrapezmethode für $n = 2$ Intervalle (2)

c) mit der Keplerschen Faßregel für $n = 2$ Intervalle (2)

Lösung

$$a) \int_2^6 \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_2^6 = \frac{1}{9} \approx 0,11 \quad (2)$$

$$b) \int_2^6 \frac{1}{x^3} dx \approx \frac{4}{4} \left(\frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{216} \right) \approx 0,16 \quad (2)$$

$$c) \int_2^6 \frac{1}{x^3} dx \approx \frac{4}{6} \left(\frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{216} \right) \approx 0,13 \quad (2)$$

Aufgabe 12: Näherungsverfahren (6)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx$

a) mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (2)

b) mit der Sehnentrapezmethode für $n = 2$ Intervalle (2)

c) mit der Keplerschen Faßregel für $n = 2$ Intervalle (2)

Lösung

$$a) \int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^2 \approx 0,805 \quad (2)$$

$$b) \int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx \approx \frac{2}{4} \left(0 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \right) = \frac{7}{10} = 0,7 \quad (2)$$

$$c) \int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx \approx \frac{2}{6} \left(0 + 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \right) = \frac{4}{5} = 0,8 \quad (2)$$