5.5. Integralrechnung

5.5.1. Berechnung von Integralen mit der Streifenmethode

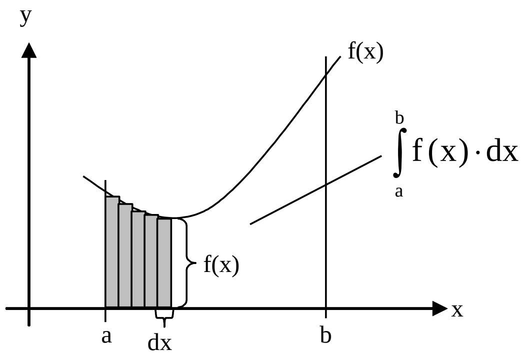
Definition:
Gegeben seien a, b $\in \mathbb{R}$ mit a < b und eine auf [a; b] stetige Funktion f .

Der **orientierte Inhalt** der Fläche, die durch

- die x-Achse,
- das Schaubild des **Integranden** f,
- die **untere Grenze** x = a und
- die **obere Grenze** x = b

begrenzt wird, heißt dann **Integral** $\int_a^b f(x)dx$

von f über x zwischen a und b.



Bemerkungen:
1. Der **orientierte Flächeninhalt** hat ein **positives** bzw. **negatives Vorzeichen**, wenn die Fläche oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse liegt.
2. Wird das Integral als Funktion in Abhängigkeit von der oberen Grenze b betrachtet, so nennt man es auch **Integralfunktion I**$_a(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)dx$.
3. Das Integral läßt sich mit beliebiger Genauigkeit **annähern**, indem man es als **Summe S_n** von n Rechtecken mit den Höhen $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... und der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ zwischen den Grenzen **a** und **b** bildet. Dabei müssen die Stellen x_1, x_2, ... jeweils im 1., 2., ... Rechteck mit der Breite Δx liegen: $S_n = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + ... + f(x_n)\cdot\Delta x$. Für $n \to \infty$ und $\Delta x \to 0$ streben dann die Summen S_n gegen das Integral: $S_n \to \int_a^b f(x)dx$ für $n \to \infty$

Übungen: Aufgaben zur Berechnung von Integralen mit der Streifenmethode

5.5.2. Stammfunktionen

Definition:
Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** zur Funktion f, falls F'(x) = f(x) für alle x $\in$ D.
Das Bilden der Stammfunktion ist die Umkehrung des Ableitens und wird daher auch **Aufleiten** genannt.

Aufleitunsregeln:

	Funktion f(x) =	Stammfunktion $F_c(x)$ =
Konstante Faktoren bleiben unverändert	$a\cdot g(x)$	$a\cdot G_c(x)$
Summen werden einzeln aufgeleitet	$g(x) + h(x)$	$G_c(x) + H_c(x)$
Potenzfunktionen	x^n mit $n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
	x^{-1}	$\ln x + c$
Ganzrationale Funktionen	$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$	$\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + ... + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x + c$

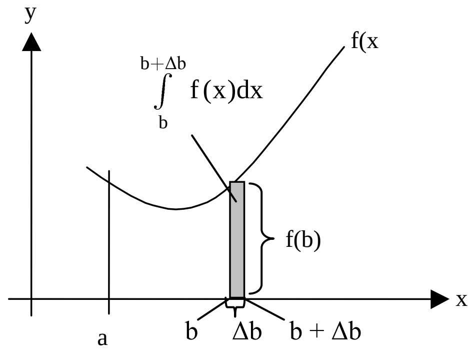
Übungen: Aufgaben zur Integralrechnung Nr. 1

5.5.3. Berechnung von Integralen mit Stammfunktionen

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für stetige Funktionen
Gegeben sei eine auf dem Intervall [a,b] **stetige** Funktion f(x) mit der **Stammfunktion** F(x). Das Integral von f über x zwischen a und b ist gleich der Differenz der Funktionswerte der Stammfunktion an den Stellen a und b:

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; F(x)\Big|_a^b \;=\; F(b) - F(a)$$

Beweis:



$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)' = (I_a(b))'$$
$$= \lim_{\Delta b\to 0}\frac{I_a(b+\Delta b)-I_a(b)}{\Delta b}$$
$$= \lim_{\Delta b\to 0}\frac{1}{\Delta b}\left(\int_a^{b+\Delta b} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right)$$
$$= \lim_{\Delta b\to 0}\frac{1}{\Delta b}\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx$$
$$= f(b),$$

denn wegen der **Stetigkeit** von f strebt $\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx$ gegen f(b)·h für Δb → 0. Dazu wählt man die Stellen x_{hm} und x_{hM} ϵ [b;b + Δb], an denen f den kleinsten bzw. größten Wert im Intervall [b;b + Δb] annimmt. Diese Stellen existieren, weil das Intervall [b;b + Δb] abgeschlossen und f stetig ist. Dann gilt die Abschätzung $f(x_{hm})\cdot\Delta b \le \int_b^{b+\Delta b} f(x)dx \le f(x_{hM})\cdot\Delta b$. Für Δb → 0 streben x_{hm} und x_{hM} gegen b. Wieder wegen der Stetigkeit von f streben dann auch $f(x_{hm})$ und $f(x_{hM})$ gegen b., d.h. $\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx$ strebt gegen f(b)·Δb.

Damit ist gezeigt, dass $(I_a(b))' = f(b) \Leftrightarrow I_a(b) = F_c(b) = F_0(b) + c$. Zur Berechnung von c setzt man b = a und erhält $0 = I_a(a) = F_0(a) + c \Leftrightarrow c = -F_0(a)$. Durch Einsetzen ergibt sich die Formel $I_a(b) = F_0(b) - F_0(a)$.

Beispiel:

$$\int_1^2 (x^2+5)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 5x\right]_1^2 = (\frac{1}{3}2^3 + 5\cdot 2) - (\frac{1}{3}1^3 + 5\cdot 1) = \frac{22}{3}$$

Übungen: Aufgaben zur Integralrechnung Nr. 2 a) – c)

5.5.4. Eigenschaften des Integrals

Intervalladditivität

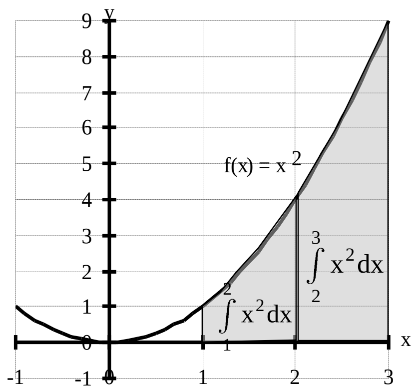
Beispiel: Aufgaben zur Integralrechnung Aufgabe 2d)

a) $\int_1^2 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{7}{3}$

b) $\int_2^3 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^3 = \frac{19}{3}$

c) $\int_1^3 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{26}{3}$

$$= \int_1^2 x^2dx + \int_2^3 x^2dx\,.$$



Intervalladditivität des Integrals
Gegeben seien die Grenzen a, b, c ϵ ℝ mit a < b < c und eine auf [a; c] stetige Funktion f mit f(x) ≥ 0 für alle x ϵ [a; c]. Dann gilt

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

In Worten:
Das Integral über das Gesamtintervall [a; c] läßt sich als Summe der Integrale über die beiden Teilintervalle [a; b] und [b; c] schreiben.

Vertauschung der Grenzen

Beispiel: Aufgaben zur Integralrechnung Nr. 2 e)

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ aber } \int_2^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^1 = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{7}{3}$$

Vertauschung der Grenzen
Vertauschung von oberer und unterer Grenze bzw. Integration von rechts nach links führt zu Vorzeichenwechsel, da die **Streifenbreite** dx < 0 ist:

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)dx\ .$$

Bemerkung:
Liegt die "obere" Grenze b **links** von der "unteren" Grenze a, so summiert man bei der **Trapezmethode** von rechts nach links und die **Streifenbreite** dx erhält ein negatives Vorzeichen.

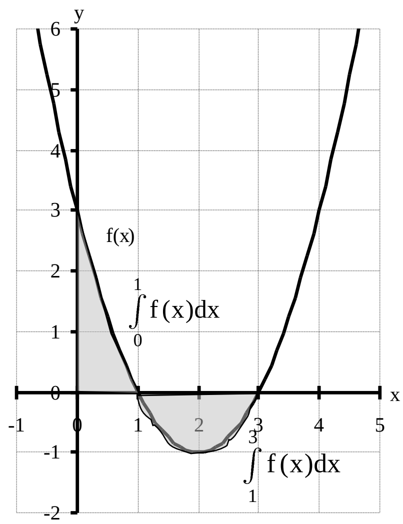
Flächen unterhalb der x-Achse

Aufgabenblatt zur Integralrechnung Nr. 2 f)

$$A = \left|\int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx\right| + \left|\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx\right|$$

$$= \left|\frac{4}{3}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right|$$

$$= \frac{8}{3} \text{ FE}$$



Flächen unterhalb der x-Achse
Flächen, die unterhalb der x-Achse liegen, werden negativ gezählt, da die **Streifenhöhe** f(x) < 0 ist:

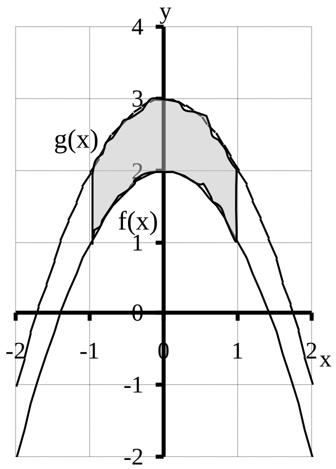
$$\int_a^b f(x)dx < 0, \text{ falls } f(x) \le 0 \text{ für alle } x \in [a; b].$$

Bemerkung:
Zur Berechnung von Flächen, die unterhalb der x-Achse liegen, verwendet man den **Betrag** des entsprechenden Integrals

Übungen: Aufgaben zur Integralrechnung Nr. 3 und 4

Flächen, die durch zwei Schaubilder begrenzt werden

Beispiel. Aufgaben zur Integralrechnung Nr. 5 a)



$$A = \int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))dx$$
$$= \int_{-1}^{1} 1dx$$
$$= x_{-1}^{1}$$
$$= 2 \text{ FE}$$

Inhalte von Flächen, die durch zwei Schaubilder begrenzt werden
Gegeben seien zwei Funktionen f und g, mit $f(x) \geq g(x)$ für alle x $\in$ [a; b]. Dann lässt sich der Inhalt A der Fläche, die durch die Senkrechten x = a und x = b sowie die Schaubilder von f und g begrenzt wird, als Integral über $f(x) - g(x)$ (= Streifenhöhe) berechnen:

$$A = \int_{a}^{b} f(x) - g(x)\; dx$$

Bemerkung:
Schneiden sich die Schaubilder von f und g innerhalb des Intervalls [a; b], so muß das Integral in entsprechende Teilintervalle aufgeteilt werden, so dass im Integranden immer die oberhalb der Fläche verlaufende Funktion ein positives Vorzeichen besitzt. (oder **Beträge** verwenden)

Übungen: Aufgaben zur Integralrechnung Nr. 5 - 7

5.5.5. Die Substitutionsmethode

Satz über die Substitutionsmethode bei der Integration
Für eine auf [a; b] differenzierbare Funktion z und eine auf [z(a); z(b)] integrierbare Funktion f gilt

$$\int_{a}^{b} z'(x) \cdot f(z(x))dx = \int_{z(a)}^{z(b)} f(z)dz$$

Beweis
Man geht von der Kettenregel der Differentialrechnung aus:

$$f(z(x))\,' = z'(x) \cdot f'(z(x)) \quad | \text{ Integration von x = a bis x = b auf beiden Seiten}$$

$$\int_{a}^{b} f(z(x))\,'dx = \int_{a}^{b} z'(x) \cdot f'(z(x))dx \quad | \text{ Hauptsatz für Integration über } \mathbf{dx} \text{ auf der linken Seite anwenden}$$

$$f(z(x))_{a}^{b} = \int_{a}^{b} z'(x) \cdot f'(z(x))dx$$

$$f(z(b)) - f(z(a)) = \int_{a}^{b} z'(x) \cdot f'(z(x))dx$$

$$f(z)_{z(a)}^{z(b)} = \int_{a}^{b} z'(x) \cdot f'(z(x))dx \quad | \text{ Hauptsatz für Integration über } \mathbf{dz} \text{ auf der linken Seite anwenden:}$$

$$\int_{z(a)}^{z(b)} f'(z)dz = \int_{a}^{b} z'(x) \cdot f'(z(x))dx$$

In der Anwendung betrachtet man die äußere Ableitung f'(z) als Ausgangsfunktion und formuliert die Gleichung daher mit f anstelle von f':

$$\int_{z(a)}^{z(b)} f(z)dz = \int_{a}^{b} z'(x) \cdot f(z(x))dx$$

Beispiele : $\int\limits_a^b z'(x)\cdot f(z(x))dx = \int\limits_{z(a)}^{z(b)} f(z)dz$ **:**

1. $\int\limits_1^2 2x\cdot e^{x^2}\,dx = \int\limits_1^4 e^z dz = e^4 - e^1$ mit $z(x) = x^2$ und $f(z) = e^z$.

2. $\int\limits_0^1 x\cdot e^{x^2+5}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 2x\cdot e^{x^2+5}dx = \int\limits_5^6 e^z dz = e^6 - e^5$ mit $z(x) = x^2 + 5$ und $f(z) = e^z$

3. $\int\limits_2^3 \frac{3x}{x^2-1}dx = \frac{3}{2}\int\limits_2^3 2x\cdot\frac{1}{x^2-1}dx = \frac{3}{2}\int\limits_3^8 \frac{1}{z}dz = \frac{3}{2}(\ln 8 - \ln 3) = \frac{3}{2}\ln\frac{8}{3}$ mit $z(x) = x^2 - 1$ und $f(z) = \frac{1}{z}$

Übungen: Aufgaben zur Integralrechnung Nr. 8

5.5.6. Produktintegration

Satz über die Produktintegration oder teilweise(partielle) Integration

Für auf [a; b] differenzierbare Funktionen g und h gilt $\int\limits_a^b g'(x)\cdot h(x)\;dx = g(x)\cdot h(x)\,{}_a^b - \int\limits_a^b g(x)\cdot h'(x)\;dx$

Beweis

Man geht von der Produktregel der Differentialrechnung aus (von rechts nach links gelesen)

$g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x) = g(x)\cdot h(x)\;' =$

Da die Stammfunktion der linken Seite bekannt ist, läßt sich daraus auch eine Regel für die (zumindest teilweise) Integration von Produkten gewinnen:

$$\int\limits_a^b g'(x)\cdot h(x)\;dx + \int\limits_a^b g(x)\cdot h'(x)\;dx = \int\limits_a^b g(x)\cdot h(x)\;'dx$$

$$= g(x)\cdot h(x)\,{}_a^b$$

Beispiele: $\int\limits_a^b g'(x)\cdot h(x)\;dx = g(x)\cdot h(x)\,{}_a^b - \int\limits_a^b g(x)\cdot h'(x)\;dx$

1. $\int\limits_0^1 x\cdot e^x\;dx = \int\limits_0^1 e^x\cdot x\;dx = \left[e^x\cdot x\right]_0^1 - \int\limits_0^1 e^x\cdot 1\;dx = \left[e^x\cdot x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = \left[e^x\cdot(x-1)\right]_0^1 = 1$

2. $\int\limits_0^\pi (x+\pi)\cdot\cos x\;dx = \int\limits_0^\pi (\cos x)\cdot(x+\pi)\;dx = (\sin x)\cdot(x+\pi)\,{}_0^\pi - \int\limits_0^\pi (\sin x)\cdot 1\;dx = (\sin x)\cdot(x+\pi)\,{}_0^\pi$

   $- \cos x\,{}_0^\pi = (\sin x)\cdot(x+\pi) - \cos x\,{}_0^\pi = 0$

3. $\int\limits_1^2 \ln x\;dx = \int\limits_1^2 1\cdot\ln x\;dx = x\cdot\ln x\,{}_1^2 - \int\limits_1^2\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)dx = x\cdot\ln x\,{}_1^2 - x\,{}_1^2 = x\cdot\ln x - x\,{}_1^2 = 2\ln 2 - 1$

Übungen: Aufgaben zur Integralrechnung Nr. 9 und 10

5.5.7. Partialbruchzerlegung

Satz über die Partialbruchzerlegung echt gebrochenrationaler Funktionen

Für a, b, x_1, x_2 ∊ ℝ und $x_1 \neq x_2$ gilt $\frac{ax+b}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$ mit A = $\frac{ax_1+b}{x_1-x_2}$ und B = $\frac{ax_2+b}{x_2-x_1}$

Beweis:

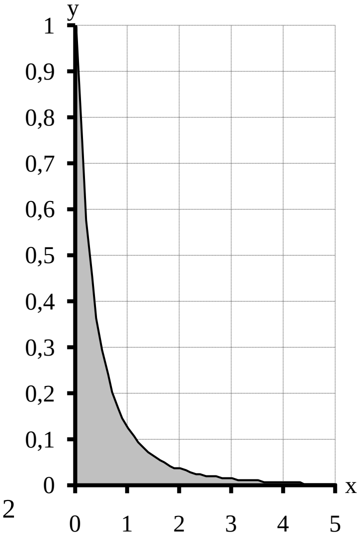
$\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} = \frac{A\cdot(x-x_2)+B\cdot(x-x_1)}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)} = \frac{(A+B)\cdot x - Ax_2 - Bx_1}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)} = \frac{ax+b}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}$ ⇔ $(A + B)\cdot x - Ax_1 - Bx_2 = ax + b$ ∀x ∊ ℝ ⇔ A + B = a und $-Ax_1 - Bx_2 = b$ ⇔ A = $\frac{ax_1+b}{x_1-x_2}$ und B = $\frac{ax_2+b}{x_2-x_1}$.

Beispiel: $\frac{ax+b}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$ mit $A = \frac{ax_1+b}{x_1-x_2}$ und $B = \frac{ax_2+b}{x_2-x_1}$

$$\int_2^3 \frac{2}{x^2-1}dx = \int_2^3 \frac{2}{(x+1)(x-1)}dx = \int_2^3 \frac{1}{x+1}dx - \int_2^3 \frac{1}{x-1}dx = \ln(x+1)\Big|_2^3 - \ln(x-1)\Big|_2^3 = \ln\frac{4}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{8}{3}$$

5.5.8. Uneigentliche Integrale

Definition
Wenn sich eine Kurve für $x \to \pm\infty$ oder $x \to a$ **schnell genug** einer Koordinatenachse oder einer anderen Kurve annähert, konvergiert auch die entsprechende Fläche gegen einen Flächengrenzwert. Die Fläche hat dann zwar eine unendliche Ausdehnung und keine geschlossene Umrandung, besitzt aber trotzdem eine endliche Maßzahl. Solche **Grenzwerte von Integralen** nennt man daher **uneigentliche Integrale**. Man schreibt abkürzend: $\int_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ bzw. $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$



Beispiel:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^3}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{(x+1)^3}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-2}{(x+1)^2}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-2}{(b+1)^2}+2\right] = 2$$

Übungen: Aufgaben zur Integralrechnung Nr. 11 und 12

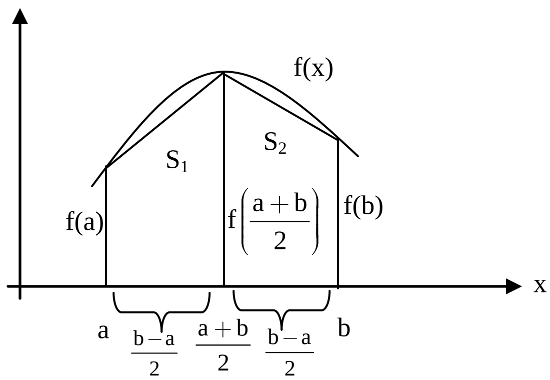
5.5.9. Numerische Integrationsmethoden

Lineare Näherung mit der Sehnentrapezregel

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2$$

$$= \frac{b-a}{2}\cdot\frac{f(a)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2} + \frac{b-a}{2}\cdot\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{2}$$

$$= \frac{b-a}{4}\left[f(a) + 2\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$



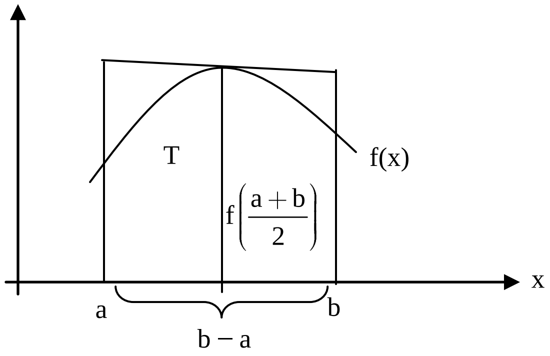
Quadratische Näherung mit der Kepler'sche Faßregel

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2(S_1+S_2)+T}{3}$$

$$= \frac{2}{3}(S_1 + S_2) + \frac{1}{3}T$$

$$= \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 2\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] + \frac{1}{3}(b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$= \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$



Beispiel:

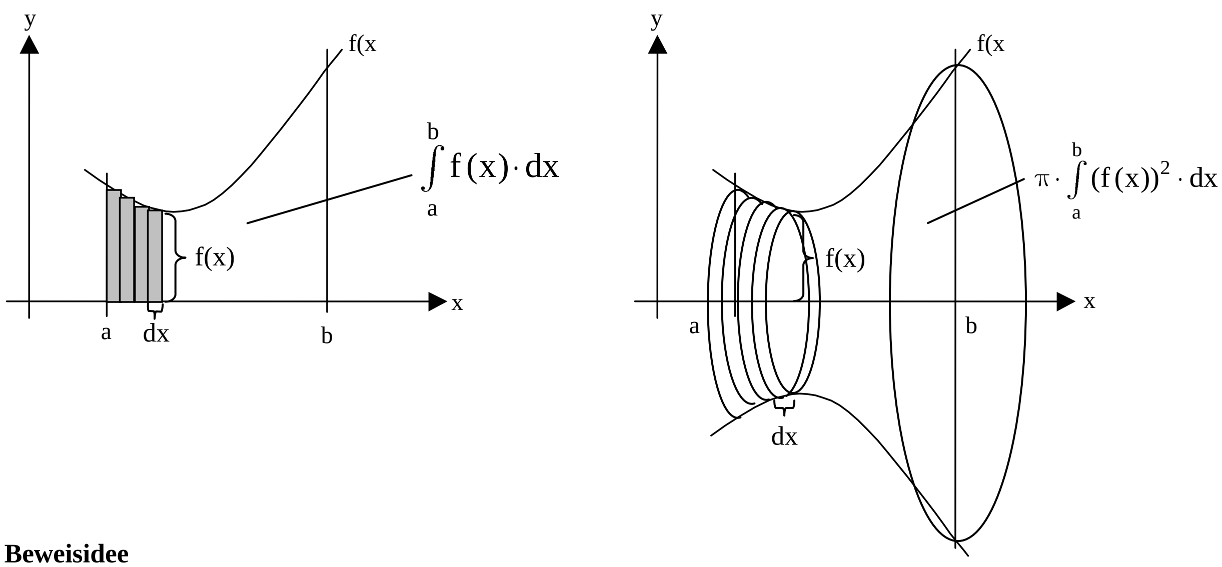
1. Lineare Näherung mit Sehnentrapezregel: $\int_1^2 x^3 dx \approx \frac{2-1}{4}[1^3 + 2\cdot\left(\frac{1+2}{2}\right)^3 + 2^3] = \frac{63}{16} = 3{,}9375$
2. Quadratische Näherung mit Keplerscher Faßregel: $\int_1^2 x^3 dx \approx \frac{2-1}{6}[1^3 + 4\cdot\left(\frac{1+2}{2}\right)^3 + 2^3] = \frac{15}{4} = 3{,}75$ (!)
3. Exakter Wert mit dem Hauptsatz (Stammfunktion): $\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \frac{15}{4} = 3{,}75$

Übungen: Anwendungsaufgaben zur Integralrechnung Aufgabe 1

5.5.10. Inhalte von Rotationskörpern

Satz (Rotation um x-Achse)
Gegeben seien a, b ∊ ℝ mit a < b und eine auf [a; b] **stetige** Funktion f mit **f(x) ≥ 0** für alle x ∊ [a; b]. Dann hat der Körper, der durch Rotation des Schaubildes von f im Bereich [a; b] um die x-Achse entsteht, das Volumen

$V = \pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\cdot dx$.



Beweisidee
Die Fläche $\int_a^b f(x)dx$ zwischen Schaubild und x-Achse lässt sich mit beliebiger Genauigkeit annähern, indem man die Summe **S** der **Flächen f(x)·dx** der **Rechtecke** mit **Höhe** f(x) und **Breite** dx zwischen den Grenzen **a** und **b** bildet. Bildet man stattdessen die Summe **S** der **Volumina** $\pi\cdot f(x)^2\cdot dx$ der **Zylinder** mit **Radius** f(x) und **Höhe** dx, so erhält man entsprechend das Volumen $V = \pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\cdot dx$ zwischen rotierendem Schaubild und x-Achse

Satz (Rotation um y-Achse)
Gegeben seien a, b ∊ ℝ mit 0 < a < b und eine auf [a; b] **stetige und streng monotone** Funktion f mit der Umkehrfunktion f^{-1}. Dann hat der Körper, der durch Rotation des Schaubildes von f im Bereich [f(a); f(b)] um die y-Achse entsteht, das Volumen $V = \pi\cdot\int_{f(a)}^{f(b)} (f^{-1}(y))^2\cdot dy$.

Beweis: klar

Übungen: Anwendungsaufgaben zur Intergralrechnung Nr. 2 - 5