5.6. Prüfungsaufgaben zu Differentialgleichungen und Wachstumsformen

Aufgabe 1: Exponentielle Änderung (3)
Die Masse eines radioaktiven Präparates betrug zu Beobachtungsbeginn 5 g und nimmt seitdem jede Stunde um 2 % ab. Beschreiben Sie diesen Vorgang mit einer Differentialgleichung und geben Sie die Lösung dieser Differentialgleichung an.

Lösung
Es sei t die Zeit in Stunden seit Beobachtungsbeginn und M(t) die Masse des Präparates zur Zeit t in g. Dann ist $M'(t) = -0{,}02\cdot M(t)$ mit der Lösung $M(t) = 5g\cdot e^{-0{,}02t}$.

Aufgabe 2: Exponentielle Änderung (3)
Die Fläche einer Bakterienkultur betrug zu Beobachtungsbeginn 5 cm^2 und nimmt seitdem jede Stunde um 2 % zu. Beschreiben Sie diesen Vorgang mit einer Differentialgleichung und geben Sie die Lösung dieser Differentialgleichung an.

Lösung
Es sei t die Zeit in Stunden seit Beobachtungsbeginn und F(t) die Fläche der Bakterienkultur zur Zeit t in cm^2. Dann ist $F'(t) = 0{,}02\cdot F(t)$ mit der Lösung $F(t) = 5cm^2\cdot e^{0{,}02t}$.

Aufgabe 3: Beschränktes Wachstum (7)
Ein Teich bietet Platz für maximal 7000 Fische. In einem Modell soll angenommen werden, dass die Änderungsrate des Fischbestandes proportional zur Anzahl der noch Platz findenden Fische ist. Anfangs befinden sich 4000 Fische im Teich. Nach einem Monat sind 4400 Fische vorhanden.
a) Geben Sie eine zugehörige Differenzialgleichung an. (1)
b) Bestimmen Sie eine Funktion, welche diesen Fischbestand in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. (2)
c) Nach wie vielen Monaten sind 5000 Fische in dem Teich vorhanden? (2)
d) Wie viele Fische müssten sich am Anfang im Teich befinden, damit bei unveränderten Wachstumsbedingungen erst nach fünf Monaten 5000 Fische vorhanden sind? (2)

Lösung
a) $B'(t) = k\cdot[S - B(t)]$ mit $S = 7000$ (1)
b) $B(t) = 7000 - 3000e^{-kt}$ mit $B(1) = 4400 \Rightarrow k = \ln\frac{3000}{2600} \approx 0{,}143 \Rightarrow B(t) = 7000 - 3000e^{-0{,}143t}$ (2)
c) $B(t) = 5000 \Leftrightarrow t \approx \frac{\ln(1{,}5)}{0{,}143} \approx 2{,}84$, also nach knapp drei Monaten. (2)
d) $B_5(t) = 7000 - Ae^{-0{,}143t}$ mit $B_5(5) = 5000 \Rightarrow A = 4088{,}4 \Rightarrow$ Startwert $B_5(0) \approx 2912$ Fische (2)

Aufgabe 4: Beschränktes Wachstum (8)
Nach einem leichten Erdbeben verändert sich in einer unterirdischen Höhle' das Wasservolumen V(t), das bisher 60 m^3 betrug, mit der Wachstumsgeschwindigkeit $V'(t) = 0{,}72e^{-0{,}008t}$; t in Wochen seit dem Erdbeben, V(t) in m^3.
e) Woran ist erkennbar, dass das Wasservolumen zunimmt? (1)
f) Bestimmen Sie einen Funktionsterm für V(t). (2)
g) Mit welchem Wasservolumen ist auf lange Sicht zu rechnen? (1)
h) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass V(t) die Differenzialgleichung $V'(t) = 0{,}008\cdot[150 - V(t)]$ erfüllt. (1)
i) Erläutern Sie mit Hilfe der Differenzialgleichung, dass die Veränderung des Wasservolumens auf einen konstanten Zufluss und einen zeitabhängigen Abfluss von Wasser zurückgeführt werden kann. (3)

Lösung
a) V(t) steigt monoton, weil $V'(t) > 0$ (1)
b) Stammfunktion $V_c(t) = -90e^{-0{,}008t} + c$ mit $V_c(0) = 60 \Rightarrow c = 150 \Rightarrow V(t) = 150 - 90e^{-0{,}008t}$ (2)
c) $V(t) \to 150$ für $t \to \infty$ (Sättigungsschranke) (1)
d) $0{,}008\cdot[150 - V(t)] = 0{,}008\cdot[90e^{-0{,}008t}] = 0{,}72e^{-0{,}008t} = V'(t)$ (1)
e) $V'(t) = 0{,}008\cdot[150 - V(t)] = 1{,}2 - 0{,}008\cdot V(t) \Rightarrow$ Der Zufluss setzt sich also zusammen aus dem konstanten Zufluss +1,2 m^3/Woche und dem zeitabhängigen Abfluss $-0{,}008\cdot V(t)$ m^3/Woche (2)

Aufgabe 5: Beschränktes Wachstum, Integration, Tangenten (12)

In einem Land mit ca. 6,0 Millionen Haushalten gab es zu Beginn des Jahres 2004 etwa 3,0 Millionen Haushalte mit einem DVD-Player. Die Entwicklung der Anzahlen (in Millionen) seit dem Jahr 2000 kann modellhaft durch eine Funktion g dargestellt werden, die für $x \geq 0$ der Differenzialgleichung $g'(x)=0{,}2\cdot(5{,}2 - g(x))$ genügt. Dabei ist x die Anzahl der seit Beginn des Jahres 2000 vergangenen Jahre.

a) Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Funktion g. (2)
   Mit welcher Anzahl von Haushalten mit DVD-Playern ist langfristig zu rechnen? (1)
   Zu welchem Zeitpunkt steht in 70% der Haushalte des Landes ein DVD-Player? (1)
   Bestimmen Sie die mittlere Anzahl von Haushalten mit DVD-Player von Anfang 2000 bis zu diesem Zeitpunkt. (2)
   Wann lag die Änderungsrate der Anzahlen erstmals unter 0,6 Millionen pro Jahr? (1)

b) Welche Größe wird durch g'(4) beschrieben? (1)
   Erläutern Sie, wie man nur mit Hilfe von g'(4) und g(4) einen Näherungswert für g(4,5) berechnen kann. (2)
   Bestimmen Sie diesen Näherungswert. (1)
   Begründen Sie, warum dieser Näherungswert größer als g(4,5) ist. (1)

Lösung

a) $g(x) = 5{,}2 - A\cdot e^{-0{,}2x}$ mit $g(4) = 3 \Leftrightarrow A = 2{,}2e^{0{,}8} \approx 4{,}9 \Rightarrow g(x) = 5{,}2 - 4{,}9e^{-0{,}2x}$ (2)

   $g(x) \to 5{,}2$ für $x \to \infty \Rightarrow$ Langfristig wird sich die Zahl der Sättigungsgrenze S = 5,2 nähern. (1)

   $g(x) = 0{,}7\cdot 6 = 4{,}2 \Leftrightarrow 1 = 4{,}9e^{-0{,}2x} \Leftrightarrow x = 5\cdot\ln(4{,}9) \approx 7{,}95$, d.h. Ende 2007 (1)

   Mittelwert $m = \frac{1}{7{,}95}\cdot\int_0^{7{,}95} g(x)dx \approx 2{,}75$ Millionen (2)

   $g(x+1) - g(x) < 0{,}6 \Leftrightarrow 4{,}9e^{-0{,}2x}(1 - e^{-0{,}2}) < 0{,}6 \Leftrightarrow x \approx 1{,}96$, d.h. von 2002 nach 2003 (1)

b) g'(4) beschreibt die momentane Änderungsrate zum Jahreswechsel 2004/2005 (1)

   Die Tangente $t(x) = g'(4)\cdot(x - 4) + g(4)$ durch $P(4|g(4))$ mit der Steigung g'(4) liefert Näherungswerte in der Umgebung von x = 4. (2)

   $t(x) = 1{,}76(x - 4) + 3 \Rightarrow t(4{,}5) \approx 3{,}88$ Millionen (1)
   $g(4{,}5) \approx 3{,}2$ ist kleiner, weil die Kurve rechtsgekrümmt ist, so dass die Tangente oberhalb verläuft. (1)

Aufgabe 6: Rotationsvolumina, beschränktes und logistisches Wachstum (12)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+4}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f sei K.

a) Skizzieren Sie K mithilfe Ihres Taschenrechners. (1)
   Das Flächenstück zwischen K, der x-Achse und den Geraden x = 0 und x = 2 rotiert um die x-Achse.
   Bestimmen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers. (2)

b) Welche Eigenschaften von K können dem Funktionsterm f(x) ohne Verwendung von Ableitungen entnommen werden? Begründen Sie Ihre Antwort. (3)

c) f wird für $x \geq 2$ verglichen mit einer Funktion h, die dort durch $h(x) = 2 - 8\,e^{-2x}$ gegeben ist.
   Zeigen Sie, dass der Unterschied zwischen den Funktionswerten von f und h monoton fällt. (2)
   Wie groß wird der maximale Unterschied? (1)
   Zeigen Sie, dass die Funktion h ein beschränktes Wachstum beschreibt. Kann das auch über f gesagt werden? (3)

Lösung

a) Skizze (1)

$V = \pi \int_0^2 (f(x))^2 dx \approx 10{,}86$ VE (2)

Achsenschnittpunkt $S_y(0|\frac{5}{2})$ durch Einsetzen (0,5)

Wertebereich W =]0; ∞[, da $e^{2x} > 0$ und $e^{2x} + 4 > 0$ (0,5)

waagrechte Asymptote y = 0 für $x \to -\infty$, da $\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+4} \to 0$ für $x \to -\infty$ (0,5)

waagrechte Asymptote y = 2 für $x \to +\infty$, da $\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+4} \to 2$ für $x \to +\infty$ (0,5)

$f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+4} = \frac{2}{1+4e^{-2x}}$ wächst streng monoton, da $1 + 4e^{-2x}$ streng monoton fällt. (0,5)

f hat daher keine Extrempunkte! (0,5)

b) $d(x) = f(x) - h(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+4} - 2 + 8e^{-2x}$ mit $d'(x) = \frac{16e^{2x}}{(e^{2x}+4)^2} - 16e^{-2x}$ (1)

Wegen $d'(x) = \frac{16(e^{2x})^2 - 16(e^{2x}+4)^2}{(e^{2x}+4)^2} < 0$ fällt der Unterschied monoton (1)

Der maximale Unterschied wird bei x = 2 erreicht mit $d(2) \approx 0{,}01$ (GTR) (1)

c) Wegen $h'(x) = 16e^{-2x}$ erfüllt h die Differenzialgleichung $h'(x) = 2(2 - h(x))$. h beschreibt daher ein beschränktes Wachstum mit der Sättigungsgrenze S = 2. (2)

Wegen $f'(x) = \frac{16e^{2x}}{(e^{2x}+4)^2}$ erfüllt f dagegen die Differenzialgleichung $f'(x) = 2\cdot f(x)\cdot(2 - f(x))$. f beschreibt daher ein logistisches Wachstum mit der Sättigungsgrenze S = 2. (1)

Aufgabe 7: Beschränktes Wachstum (7)

Bei Tropfinfusionen werden dem Blut des Patienten Medikamente gleichmäßig zugeführt. In einer Klinik werden über eine Tropfinfusion pro Minute 1,8 mg eines Medikaments verabreicht, das bislang im Körper nicht vorhanden war. Andererseits werden über die Nieren pro Minute 5 % der aktuell im Blut vorhandenen Menge dieses Medikaments ausgeschieden. Zu Beginn der Behandlung bekommt der Patient durch eine Spritze 25 mg des Medikaments verabreicht.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei dieser Situation um beschränktes Wachstum handelt. (3)
b) Bestimmen Sie eine Funktion, die den Verlauf dieses beschränkten Wachstums beschreibt. (3)
c) Mit welcher Menge des Medikaments ist bei einer längeren Behandlung des Patienten in seinem Körper zu rechnen? (1)

Lösung

a) Es sei t die seit Beginn der Verhandlung vergangene Zeit in Minuten und B(t) der Gehalt des Medikamentes im Blut in mg. Dann gilt $B'(t) = 1{,}8 - 0{,}05\cdot B(t)$. Diese DGL beschreibt ein beschränktes Wachstum. (3)
b) Ausklammern des Wachstumsfaktors ergibt $B'(t) = 0{,}05\cdot(36 - B(t)) \Rightarrow k = 0{,}05$ und S = 36. Mit B(0) = 25 erhält man die Lösung der DGL $B(t) = S - [S - B(0)]\cdot e^{-kt} = 36 - 11\cdot e^{-0{,}05t}$. (3)
c) Aus b) ergibt sich $B(t) \to S = 36$ mg für $t \to \infty$ (1)

Aufgabe 8: Beschränktes Wachstum (7)

Bei Tropfinfusionen werden dem Blut des Patienten Medikamente gleichmäßig zugeführt. In einer Klinik werden über eine Tropfinfusion pro Minute 3,2 mg eines Medikaments verabreicht, das bislang im Körper nicht vorhanden war. Andererseits werden über die Nieren pro Minute 8 % der aktuell im Blut vorhandenen Menge dieses Medikaments ausgeschieden. Zu Beginn der Behandlung bekommt der Patient durch eine Spritze 20 mg des Medikaments verabreicht.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei dieser Situation um beschränktes Wachstum handelt. (3)
b) Bestimmen Sie eine Funktion, die den Verlauf dieses beschränkten Wachstums beschreibt. (3)
c) Mit welcher Menge des Medikaments ist bei einer längeren Behandlung des Patienten in seinem Körper zu rechnen? (1)

Lösung

a) Es sei t die seit Beginn der Verhandlung vergangene Zeit in Minuten und B(t) der Gehalt des Medikamentes im Blut in mg. Dann gilt $B'(t) = 3{,}2 - 0{,}08 \cdot B(t)$. Diese DGL beschreibt ein beschränktes Wachstum. (3)

b) Ausklammern des Wachstumsfaktors ergibt $B'(t) = 0{,}08 \cdot (40 - B(t)) \Rightarrow k = 0{,}08$ und $S = 40$. Mit $B(0) = 20$ erhält man die Lösung der DGL $B(t) = S - [S - B(0)] \cdot e^{-kt} = 40 - 20 \cdot e^{-0{,}08t}$. (3)

c) Aus b) ergibt sich $B(t) \rightarrow S = 40$ mg für $t \rightarrow \infty$. (1)

Aufgabe 9: Beschränktes Wachstum

Einem Patienten werden durch Tropfinfusion 5 mg Medikament pro Minute zugeführt. Die Nieren scheiden pro Minute 5 % der im Blut vorhandenen Menge wieder aus.

a) Beschreiben Sie den Medikamentgehalt im Blut durch eine Differenzialgleichung. Mit welchem Medikamentgehalt ist langfristig zu rechnen?

b) Beschreiben Sie den Medikamentgehalt durch eine Funktionsgleichung. Wie groß ist der Medikamentgehalt nach 10 Minuten?

c) Zeigen Sie, dass die Funktionsgleichung aus b) eine Lösung der Differenzialgleichung aus a) ist.

Lösung:

a) $B'(t) = 5 - 0{,}05 \cdot B(t) = 0{,}05 \cdot [100 - B(t)] \Rightarrow$ Beschränkte Zunahme mit $B(0) = 0$ mg und Sättigungsgrenze $S = 100$ mg.

b) $B(t) = S - [S - B(0)] \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}$ mit t in Minuten $\Rightarrow B(10) = 95{,}1$ mg.

c) $B'(t) = 0{,}05 \cdot [S - B(0)] \cdot e^{-0{,}05 \cdot t} = 0{,}05 \cdot [S - B(t)]$

Aufgabe 10: Beschränkte Abnahme

In einem Land mit 78 Millionen Einwohnern kommen auf 1000 Einwohnern 9 Geburten und 11 Todesfälle im Jahr. Jedes Jahr wandern durchschnittlich 40 000 Personen aus und 180 000 Personen ein.

a) Beschreiben Sie die Entwicklung der Bevölkerungszahl durch eine Differenzialgleichung. Mit welcher Bevölkerungszahl ist langfristig zu rechnen?

b) Beschreiben Sie die Entwicklung der Bevölkerungszahl durch eine Funktionsgleichung. Wie viele Einwohner gibt es nach 5 Jahren?

c) Zeigen Sie, dass die Funktionsgleichung aus b) eine Lösung der Differenzialgleichung aus a) ist.

Lösung:

a) $B'(t) = 140\,000 - 0{,}002 \cdot B(t) = 0{,}002 \cdot [70\,000\,000 - B(t)] \Rightarrow$ Beschränkte Abnahme mit $B(0) = 78\,000\,000$ und Sättigungsgrenze $S = 70\,000\,000$.

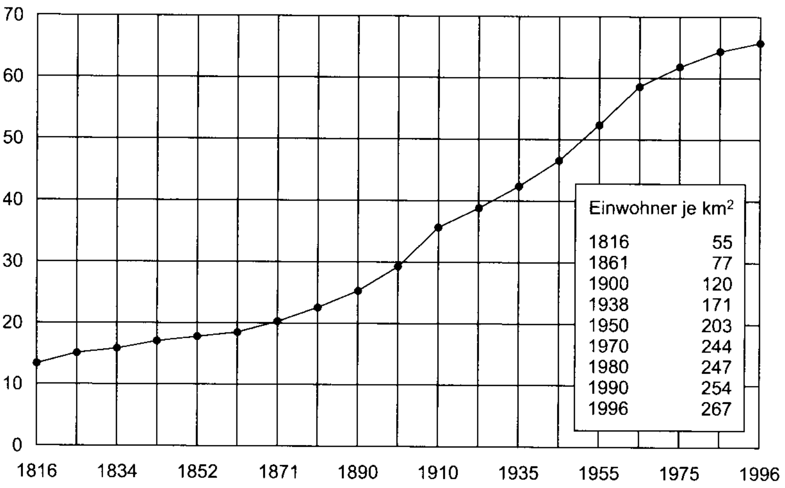
b) $B(t) = S - [S - B(0)] \cdot e^{-0{,}002 \cdot t}$ mit t in Jahren $\Rightarrow B(5) = 77\,920\,398$.

c) $B'(t) = 0{,}002 \cdot [S - B(0)] \cdot e^{-0{,}002 \cdot t} = 0{,}002 \cdot [S - B(t)]$

Aufgabe 11: Beschränktes Wachstum (15)

Das unten stehende Bild gibt die Entwicklung der Bevölkerungsdichte auf dem Gebiet der alten Bundesländer wieder.

Einwohner (in Mio.)



a) Modellieren Sie unter der Annahme exponentiellen Wachstums mittels der in der **Tabelle** angegebenen Bevölkerungsdichte eine geeignete Funktion, die die Entwicklung in den Jahren 1861 bis 1910 näherungsweise beschreibt. (3)
b) Bestimmen Sie damit eine Prognose für die Bevölkerungsdichte und die Bevölkerungszahl im Jahr 2004. (1)
c) Die Entwicklung der Bevölkerungsdichte ab 1950 deutet auf beschränktes Wachstum hin. Geben Sie eine geeignete Differenzialgleichung für diese Wachstumsform an. (1)
d) Leiten Sie eine Lösung dieser Differenzialgleichung her. (4)
e) Bestimmen Sie mit den Daten der Jahre 1950, 1980 und 1996 die Funktion, die diese Entwicklung widerspiegelt. (5)
f) Welche langfristige Bevölkerungsdichte ergibt sich nach diesem Modell? (1)

Lösung

a) Ansatz $B(t) = B(0)\cdot e^{kt}$ mit $B(0) = 77$ für das Jahr 1861 ($t = 0$) und $B(39) = 120$ für das Jahr 1900 ($t = 39$) $\Rightarrow$ $B(0) = 77$ und $k = \frac{1}{39}\cdot\ln\frac{120}{77} \approx 0{,}114 \Rightarrow B(t) \approx 77\cdot e^{0{,}114\,t}$ mit t in Jahren ab 1861. (3)
b) $B(143) \approx 392$ für das Jahr 2004 (1)
c) $B'(t) = k\cdot(S - B(t))$ (1)
d) Man bringt alle von t abhängenden Ausdrücke auf eine Seite und integriert dann mit linearer Substitution: $\frac{B'(t)}{S-B(t)} = k \Rightarrow \int_0^{t_0}\frac{B'(t)}{S-B(t)}dt = \int_0^{t_0} k\,dt \Leftrightarrow \left[-\ln\left|S-B(t)\right|\right]_0^{t_0} = \left[kt\right]_0^{t_0} \Leftrightarrow \ln\frac{S-B(t_0)}{S-B(0)} = -kt_0 \Leftrightarrow \frac{S-B(t_0)}{S-B(0)}$ $= e^{-kt0} \Leftrightarrow B(t_0) = S - (S - B(0))\cdot e^{-kt0}$. (4)
e) $B(0) = 203$ für das Jahr 1950
$B(30) = 247$ für das Jahr 1980 $\Rightarrow \ln\frac{S-247}{S-203} = -30k$
$B(46) = 267$ für das Jahr 1996 $\Rightarrow \ln\frac{S-267}{S-203} = -46k$
Gleichsetzen ergibt $30\ln\frac{S-267}{S-203} = 46\ln\frac{S-247}{S-203} \Leftrightarrow 30\ln\frac{S-267}{S-203} - 46\ln\frac{S-247}{S-203} = 0$ Lösung mit dem GTR (CALC / 2: ZERO) ergibt $S \approx 438{,}5$ E / km². Mit Einsetzen erhält man weiter $k \approx \frac{1}{46}\ln\frac{438{,}5-267}{438{,}5-203}$ 🕔 $0{,}00689 \Rightarrow B(t) = 438{,}5 - 235{,}8\cdot e^{0{,}00689\cdot t}$ E / km² (5)
f) Aus e) ergibt sich $S = 438{,}5$ E / km². (1)

Aufgabe 12: Wachstum und Differentialgleichungen (13)

Die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze Abiturium wird in den ersten zehn Jahren nach der Pflanzung durch die Funktion $f(t) = 6e^4\frac{e^t}{(e^t+e^4)^2}$ mit $t \in \mathbb{R}^+$ beschrieben, wobei t in Jahren nach der Pflanzung, f(t) in Metern pro Jahr angegeben ist. Zum Zeitpunkt der Pflanzung ist die Pflanze 10 cm hoch. Das Schaubild von f sei K.

a) Zeichnen Sie K mit Hilfe des GTR und skizzieren Sie K für $0 \le t \le 10$. (2)
Wann wächst die Pflanze am schnellsten? (1)
Zu welchen Zeitpunkten wächst die Pflanze um 1 m pro Jahr ? (2)
Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion, welche die zeitliche Entwicklung der Pflanzenhöhe beschreibt. (1)
Wie hoch ist die Pflanze nach 4 Jahren? (2)
b) Nun soll in den ersten 4 Jahren die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze vereinfacht durch exponentielles Wachstum beschrieben werden.
Bestimmen Sie mithilfe der Werte der oben angegebenen Funktion f(t) für t = 0 und t =1 die Differentialgleichung und die Lösungsfunktion g(t) für exponentielles Wachstum. (3)
In welchem Zeitraum verdoppelt sich die Wachstumsgeschwindigkeit? (1)
Vergleichen Sie mithilfe der Werte nach 4 Jahren das vereinfachte Modell mit dem ursprünglichen Modell. (1)

Aufgabe 13: Hagen-Poisseuille-Gesetz für Reibungswiderstand in einem Rohr bei laminarer Strömung
Eine Flüssigkeit mit der **Viskosität** η erreicht in einem Rohr der **Länge** l und mit dem **Durchmesser** R bei einer **Druckdifferenz** $\Delta p = p_a - p_e$ zwischen den Rohrenden einen **Volumenstrom** (= Durchflussvolumen pro Zeit) $V'(t) = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \cdot \Delta p$. Sowohl der Volumenstrom V'(t) als auch die Druckdifferenz Δp Ein 50 m langes, 20 m breites und 2 m tiefes Schwimmbecken soll durch ein 20 m langes und 20 cm dickes Rohr geleert werden, dessen Anfang im Beckenboden liegt und dessen Ende frei liegt. Der Druck auf das Rohrende ist also gleich dem Luftdruck p_e = 100 000 N/m^2. Der Druck $p_a = \frac{F_G}{A}$ auf den Rohranfang mit der Querschnittsfläche A kommt durch die auf ihm lastende Gewichtskraft $F_G = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot A \cdot h(t) \cdot g$ der Wassersäule mit der Dichte ρ, der Grundfläche A und der Höhe h(t) zustande. Wasser hat die **Viskosität** η = 1 Ns/m^2 und die **Dichte** ρ = 1 g/cm^3. Die Schwerebeschleunigung ist g = 9,81 m/s^2. Bestimme die Ausflussgeschwindigkeit V(t) in Litern pro Sekunde. Wie lange dauert es, bis das Wasser nur noch 0,5 cm hoch steht? (Der Rest verdunstet dann!).