5.6. Differentialgleichungen

Bei viele physikalischen Problemen ergeben sich **Differentialgleichungen (DGL)**, in denen eine physikalische Größe y(x) und ihre eigen Ableitung y'(x) vorkommen. Beispiele sind

- **Weg** s(t) und **Geschwindigkeit** v(t) = s'(t)
- **Geschwindigkeit** v(t) und **Beschleunigung** a(t) = v'(t)
- **Ladung** Q(t) und **Stromstärke** I(t) = Q'(t)
- **Arbeit** W(t) und **Leistung** P(t) = W'(t)

Da sowohl y(x) als auch y'(x) auftauchen gelingt es in der Regel nicht, solche Gleichungen nach y(x) aufzulösen. Man ist in vielen Fällen auf Probieren oder Näherungsverfahren angewiesen. Für einige besonders häufige und einfache Typen von Differentialgleichungen gibt es aber allgemeingültige Lösungsansätze, die im folgenden vorgestellt werden sollen.

5.6.1. Trennung der Variablen

Definition: Eine DGL hat

- 1., 2., 3., usw. **Ordnung** wenn sie höchstens 1., 2., 3., Ableitungen y'(x), y''(x), y'''(x), usw. enthalten
- **linear**, wenn die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen nur in 1. Potenz auftreten,
- **nichtlinear**, wenn die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen auch in höheren Potenzen auftreten.

Beispiele

1. $y'(x) = 0{,}2\cdot y(x) + 2$ ist eine lineare DGL 1. Ordnung
2. $(y'(x))^2 = 0{,}2\cdot y(x) + 2$ ist eine quadratische DGL 1. Ordnung
3. $y''(x) - 2y'(x) + 2 = 0$ ist eine lineare DGL 2. Ordnung
4. $y''(x) = y(x) + x^2 - 5$ ist auch eine lineare DGL 2. Ordnung

Übungen: Aufgaben zu Differentialgleichungen Nr. 1

Differentialschreibweise

In den Naturwissenschaften werden Differenzen oft mit einem Delta Δ abgekürzt und Argumente von Funktionen weggelassen. Der **Differenzenquotient** schreibt sich dann $\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0} = \frac{\text{Differenz der y-Werte}}{\text{Differenz der x-Werte}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Für die gegen Null strebenden Differenzen des **Differentialquotienten** verwendet man die **Differentialschreibweise**: $y'(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$.

Merke: Δ = endliche Differenz, d = unendlich kleine Differenz.

Beispiel für die Lösung eine linearen DGL 1. Ordnung durch Trennung der Variablen

Bestimme die Lösung y(x) der Differentialgleichung $y'(x) = 2\cdot y(x) - 5$ mit gegebenem Anfangswert $y(0) = \frac{3}{2}$

Lösung:

$$y'(x) = 2\cdot y(x) - 5 \quad | \text{ Differentialschreibweise anwenden}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\cdot y - 5 \quad | \text{ Trennung der Variablen: } \cdot dx; :2y - 5$$

$$\frac{dy}{2y-5} = dx \quad | \text{ Integration auf beiden Seiten:}$$

Man integriert links von y(0) bis y(x) und rechts entsprechend von 0 bis x. Vereinfachend wird hier der gleiche Buchstabe x sowohl als Integrationsvariable als auch als obere Grenze eingesetzt!

$$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{2y-5}\,dy = \int_0^x 1dx \quad | \text{ Integrale mit Stammfunktionen lösen}$$

$$\left[\frac{1}{2}\ln(2y-5)\right]_{y(0)}^{y(x)} = [x]_0^x \quad | \text{ Einsetzen}$$

$$\frac{1}{2}[\ln(2y(x) - 5) - \ln(2y(0) - 5)] = x - 0 \quad | \cdot 2$$

$$\ln\left(\frac{2y(x)-5}{2y(0)-5}\right) = 2x \qquad | \text{ Exponieren}$$

$$\frac{2y(x)-5}{2y(0)-5} = e^{2x} \qquad |\cdot 2y(0) - 5;\ + 5;\ :2$$

$$y(x) = (y(0) - \frac{5}{2})e^{2x} + \frac{5}{2} \qquad | \ y(0) = \frac{3}{2} \text{ einsetzen}$$

$$= e^{2x} + \frac{5}{2}$$

Übungen: Aufgaben zu Differentialgleichungen Nr. 2

5.6.2. Exponentielles Wachstum (siehe auch 4.7.4.)

Exponentielles Wachstum.

Exponentielles Wachstum tritt auf, wenn die **Änderungsrate** f'(t) = $\frac{df}{dt}$ proportional zum **Bestand** f(t) ist:

$$\frac{df}{dt} = k\cdot f(t) \qquad | \ \textbf{Trennung der Variablen}$$

$$\frac{df}{f} = k\cdot dt \qquad | \text{ Integration auf beiden Seiten}$$

$$\int_{f(0)}^{f(t)} \frac{df}{f} = \int_0^t k\,dt \qquad | \text{ Lösen der Integrale mit Stammfunktionen}$$

$$\ln\left(\frac{f(t)}{f(0)}\right) = k\cdot t \qquad | \text{ Exponieren und nach f(t) auflösen}$$

$$f(t) = f(0)\cdot e^{kt}.$$

Übungen: Aufgaben zu Differentialgleichungen Nr. 3 - 5

5.6.3. Beschränktes Wachstum (siehe auch 4.7.5.)

Beschränktes Wachstum

Beschränktes Wachstum tritt auf, wenn die **Änderungsrate** f'(t) = $\frac{df}{dt}$ proportional zum **Sättigungsmanko** S − f(t) ist:

$$\frac{df}{dt} = k\cdot[S - f(t)] \qquad | \ \textbf{Trennung der Variablen}$$

$$\frac{df}{S-f} = k\cdot dt \qquad | \text{ Integration auf beiden Seiten}$$

$$\int_{f(0)}^{f(t)} \frac{df}{S-f} = \int_0^t k\,dt \qquad | \text{ Lösen der Integrale mit Stammfunktionen}$$

$$-\ln\left(\frac{S-f(t)}{S-f(0)}\right) = k\cdot t \qquad | \text{ Exponieren und nach f(t) auflösen}$$

$$f(t) = S - [S - f(0)]\cdot e^{-kt}.$$

Übungen: Aufgaben zu Differentialgleichungen Nr. 6 - 8

5.6.4. Logistisches Wachstum (siehe auch 4.7.6.)

Logistisches Wachstum

Logistisches Wachstum tritt auf, wenn die **Änderungsrate** f'(t) = $\frac{df}{dt}$ proportional zum **Bestand** f(t) und zum **Sättigungsmanko** S − f(t) ist:

$$\frac{df}{dt} = k\cdot f(t)\cdot[S - f(t)] \qquad |\textbf{Trennung der Variablen}$$

$$\frac{df}{f\cdot(S-f)} = k\cdot dt \qquad |\text{ Partialbruchzerlegung}$$

$$\frac{df}{S\cdot f} + \frac{df}{S\cdot(S-f)} = k\cdot dt \qquad |\ \cdot S$$

$$\frac{df}{f} + \frac{df}{S-f} = S\cdot k\cdot dt \qquad |\text{ Integration auf beiden Seiten}$$

$$\int_{f(0)}^{f(t)}\frac{df}{f} + \int_{f(0)}^{f(t)}\frac{df}{S-f} = \int_0^t Skdt \qquad |\text{ Lösen der Integrale mit Stammfunktionen}$$

$$\ln\left(\frac{f(t)}{f(0)}\right) - \ln\left(\frac{S-f(t)}{S-f(0)}\right) = Sk\cdot t \qquad |\text{ Vereinfachen}$$

$$\ln\left(\frac{f(t)\cdot[S-f(0)]}{f(0)\cdot[S-f(t)]}\right) = Sk\cdot t \qquad |\text{ Exponieren und mit Hauptnenner multiplizieren}$$

$$f(t)\cdot[S - f(0)] = f(0)\cdot[S - f(t)]\cdot e^{Skt} \qquad |\text{ nach f(t) auflösen}$$

$$f(t) = \frac{f(0)\cdot S\cdot e^{Skt}}{[S-f(0)]+f(0)\cdot e^{Skt}} \qquad |\text{ Vereinfachen}$$

$$f(t) = \frac{f(0)\cdot S}{[S-f(0)]e^{-Skt}+f(0)} \qquad |\text{ Ableitung mit Kettenregel (Probe)}$$

$$f'(t) = -S\cdot k\cdot[S - f(0)]\cdot e^{-Skt}\left(-\frac{f(0)\cdot S}{\left([S-f(0)]e^{-Skt}+f(0)\right)^2}\right)$$

$$= k\cdot\frac{f(0)\cdot S}{[S-f(0)]e^{-Skt}+f(0)}\cdot\frac{S\cdot[S-f(0)]e^{-Skt}+S\cdot f(0)-S\cdot f(0)}{[S-f(0)]e^{-Skt}+f(0)}$$

$$= k\cdot f(t)\cdot[S - f(t)]$$

Übungen: Aufgaben zu Differentialgleichungen Nr. 9

5.6.5. Harmonische Schwingungen (siehe auch 4.8.2.)

Harmonische Schwingung

Eine harmonische (ungedämpfte) Schwingung tritt ein, wenn die **Beschleunigung** f''(t) entgegengesetzt proportional zur **momentanen Auslenkung** f(t) ist: f''(t) = $-\omega^2\cdot f(t)$ mit der **Winkelgeschwindigkeit** ω und der **maximalen Auslenkung** = **Amplitude** f(0) = A. Diese DGL 2. Ordnung hat die Lösung f(t) = A·cos (ωt) mit der. Die Schwingung hat dann die **Periodendauer** T = $\frac{2\pi}{\omega}$ bzw. die **Frequenz** f = $\frac{1}{T}$.

Übungen: Aufgaben zu Differentialgleichungen Nr. 10 und 11