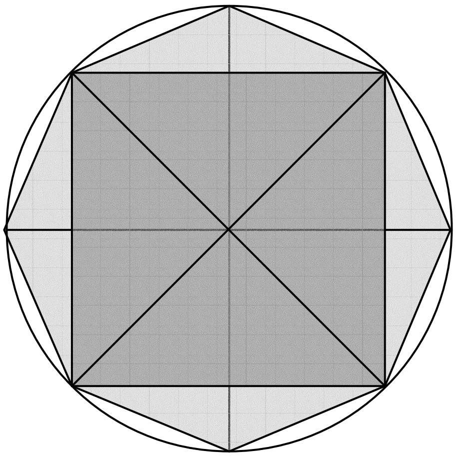
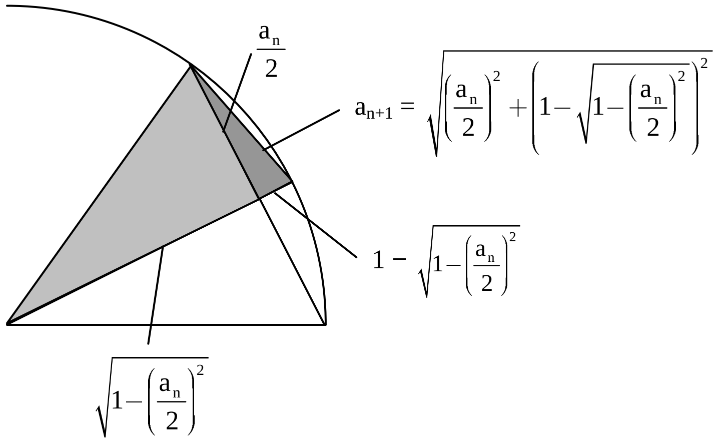
5.7.6. Rekursive Näherung der Kreiszahl π nach Liu Hui AD 263





Wenn man einem Kreis mit Radius 1 regelmäßige n-Ecke einzeichnet, sollten deren halbe Umfänge π_n gegen die Kreiszahl π streben: $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n = \pi$. Man beginnt z.B. mit dem Durchmesser, einem 2-Eck mit dem halben Umfang $\pi_2 = 2$. Durch Verdopplung der Eckenzahl erhält man ein 4-Eck mit dem halben Umfang $\pi_4 = 2\sqrt{2}$. Durch nochmalige Verdopplung wird daraus ein 8-Eck mit dem halben Umfang $\pi_8 = 4\sqrt{\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Hat man schließlich ein n-Eck mit der Seitenlänge a_n. und dem halben Umfang $\pi_n = \frac{n}{2} \cdot a_n$, so erhält man für das 2n-Eck die Seitenlänge $a_{2n} = \sqrt{\left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} + 1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$ und den halben Umfang $\pi_{2n} = n \cdot a_{2n} = n\sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}} = n\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{2\pi_n}{n}\right)^2}}$, also

$$\pi_{2n} = n\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{n}\right)^2}} \quad \text{(Gleichung I).}$$

Für das 16-Eck ergibt sich also mit n = 8 die Näherung $\pi_{16} = 8\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{\pi_8}{8}\right)^2}} = 8\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$. Für das 32-Eck ist entsprechend $\pi_{32} = 16\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$. Eine **explizite Formel** für die Näherung von π durch ein 2^{k+1}-Eck ist also

$$\pi_{2^{k+1}} = 2^k \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}}_{\text{k mal die 2}} \text{. (Gleichung (II)}$$

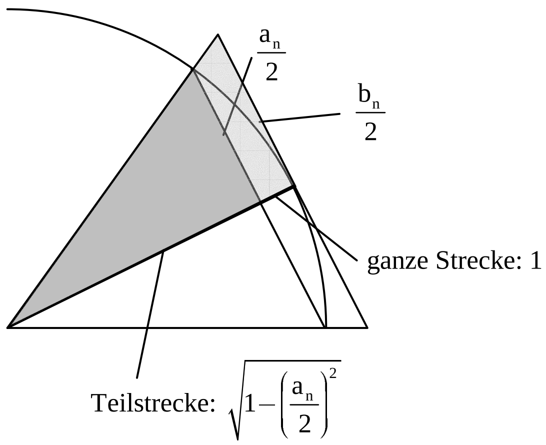
Der chinesische Mathematiker Liu Hui berechnete im Jahr AD 263 mit einer leicht modifizierten Formel (Start mit einem Sechseck mit $\pi_0 = 3$) für ein $6 \cdot 2^9$-Eck den Wert $\pi_{10} \approx 3{,}1416$. Bei ihrer fortgesetzten Anwendung erlebt man allerdings die unangenehme Überraschung, dass die Werte ab ca. k = 10 wieder auseinanderlaufen! Es ist also eine Konvergenzuntersuchung notwendig: Anschaulich klar ist, dass der halbe Umfang π_{2n} des 2n-Ecks größer sein muss als der des n-Eckes π_n. Rechnerisch sieht man das durch Bestimmung der Lösungsmenge der Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\pi_{2n} &> \pi_n \\
n\sqrt{2-2\sqrt{1-\left(\frac{\pi_n}{n}\right)^2}} &> \pi_n \\
\sqrt{2-2\sqrt{1-\left(\frac{\pi_n}{n}\right)^2}} &> \frac{\pi_n}{n} \\
2-2\sqrt{1-\left(\frac{\pi_n}{n}\right)^2} &> \left(\frac{\pi_n}{n}\right)^2
\end{aligned}
$$

Wir untersuchen, ob dieses Ungleichung für alle möglichen Werte $x = \left(\frac{\pi_n}{n}\right)^2$ gilt:

$$
\begin{aligned}
2-\left(\frac{\pi_n}{n}\right)^2 &> 2\sqrt{1-\left(\frac{\pi_n}{n}\right)^2} \\
2-x &> 2\sqrt{1-x} \\
(2-x)^2 &> 4(1-x) \\
4-4x+x^2 &> 4-4x \\
x^2 &> 0.
\end{aligned}
$$

Das gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, also auch für alle $x = \left(\frac{\pi_n}{n}\right)^2$. Die Folge ist also **monoton steigend**. Um die Beschränktheit nach oben nachzuweisen, betrachtet man die Näherung des Kreisumfangs durch **umbeschriebene** Vielecke.



Man erhält die Seitenlängen der **umbeschriebenen** Vielecke $\mathbf{b_n}$ aus den Seitenlängen der **einbeschriebenen** Vielecke $\mathbf{a_n}$ durch **Streckung** bzw. mit Hilfe des **Strahlensatzes**:

$$b_n = \frac{a_n}{\sqrt{1-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}}. \text{ (siehe Abbildung)}$$

Die Umfänge der großen Vielecke sind entsprechend

$$\pi'_n = \frac{\pi_n}{\sqrt{1-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}} = \frac{\pi_n}{\sqrt{1-\left(\frac{\pi_n}{2n}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi_n^2}-\frac{1}{4n^2}}},$$

also

$$\pi_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi'^2_n}+\frac{1}{4n^2}}}$$

Durch Einsetzen in Gleichung (I) erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi'^2_{2n}}+\frac{1}{16n^2}}} = n\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{n}{\pi'_n}\right)^2+\frac{1}{4}}}}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{n}{\pi'_{2n}}\right)^2+\frac{1}{16}} = 2-2\sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{n}{\pi'_n}\right)^2+\frac{1}{4}}}$$

und nach wenigen Umformungen

$$\pi'_{2n} = \frac{n}{\sqrt{\frac{1}{2-2\sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{n}{\pi'_n}\right)^2+\frac{1}{4}}}}-\frac{1}{16}}}.$$

Diese Folge fällt monoton, wenn

$$\pi'_{2n} < \pi'_n$$

$$\frac{n}{\sqrt{\frac{1}{2-2\sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{n}{\pi'_n}\right)^2+\frac{1}{4}}}}-\frac{1}{16}}} < \pi'_n$$

$$\frac{1}{2-2\sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{n}{\pi'_n}\right)^2+\frac{1}{4}}}} > \left(\frac{n}{\pi'_n}\right)^2+\frac{1}{16}.$$

Man kürzt ab $x = \left(\frac{n}{\pi'_n}\right)^2$ und erhält

$$\frac{1}{2-2\sqrt{1-\frac{1}{x+\frac{1}{4}}}} > x+\frac{1}{16}$$

$$2-2\sqrt{1-\frac{1}{x+\frac{1}{4}}} < \frac{1}{x+\frac{1}{16}}$$

$$2-\frac{1}{x+\frac{1}{16}} < 2\sqrt{1-\frac{1}{x+\frac{1}{4}}}$$

$$\left(2-\frac{1}{x+\frac{1}{16}}\right)^2 < 4-\frac{4}{x+\frac{1}{4}}$$

$$4-\frac{4}{x+\frac{1}{16}}+\frac{1}{\left(x+\frac{1}{16}\right)^2} < 4-\frac{4}{x+\frac{1}{4}}$$

$$x+\frac{1}{16}+\frac{1}{4} > \frac{x+\frac{1}{16}}{x+\frac{1}{4}}$$

$$x + \frac{5}{16} > 1 - \frac{\frac{5}{16}}{x+\frac{1}{4}}$$

$$x > \frac{11}{16} - \frac{5}{16x+4}$$

$$> \frac{11}{16} - \frac{5}{4}$$

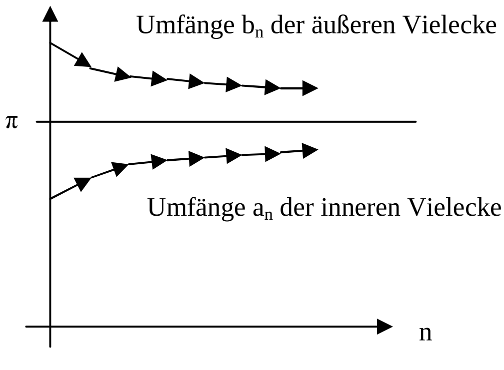
$$= -\frac{9}{16}.$$

Da $x = \left(\frac{n}{\pi'_n}\right)^2 > 0$, ist dieses Ungleichung immer erfüllt und die Umfänge π'_n der großen Vielecke fallen (erwartungsgemäß) monoton ab. Da sie aber andererseits wegen $\pi'_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi_n^2} - \frac{1}{4n^2}}} = \frac{\pi_n}{\sqrt{1-\left(\frac{\pi_n}{4n}\right)^2}} > \pi_n$ immer oberhalb der Umfänge π_n der kleinen Vielecke liegen, müssen sie nach unten beschränkt sein. Umgekehrt muss die Folge der monoton wachsenden kleinen Umfänge π_n nach oben beschränkt sein. Die beiden Folgen nähern sich von unten bzw. oben jeweils einem Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n = \pi$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} \pi'_n = \pi'$. Da die Differenz $\pi'_n - \pi_n = \pi_n \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\pi_n}{4n}\right)^2}} - 1\right)$ aber für $n \to \infty$ gegen Null strebt, muss es sich um den gleichen Grenzwert handeln:

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n = \lim_{n\to\infty} \pi'_n = \pi.$$

Soweit die Theorie. Warum läuft die Folge dann bei der praktischen Berechnung trotzdem auseinander? Das Problem liegt in den vielen ineinander verschachtelten Wurzeln und Kehrwerten, die auch bei 10-stelliger Genauigkeit sehr schnell zu sich verstärkenden Rundungsfehlern führen. Schon Archimedes erkannte aber, dass man die Berechnung wesentlich vereinfachen kann, wenn man die inneren und äußeren Vielecken nicht unabhängig voneinander sondern paarweise abwechselnd auseinander mit Hilfe des **Strahlensatzes** berechnet. Dies wird im nächsten Abschnitt 5.7.7. dargestellt.

Unabhängige Berechnung (Abschnitt 5.7.6.)



Paarweise abwechselnde Berechnung (Abschnitt 5.7.7.)