5.7.8. explizite Näherung der Exponentialzahl e nach Leonhard Euler AD 1743

Wird das Kapital K_0 = 10000 € mit dem **jährlichen** Zinssatz p = 10 % verzinst, so hat man nach einem Jahr $10000\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)$ = 11000 €. Lässt man sich nun aber von der Bank die **monatlichen** Zinsen von p = 1 % auszahlen **und legt sie gleich wieder an**, so erhält man nach einem Jahr $10000\cdot\left(1+\frac{1}{12}\cdot\frac{10}{100}\right)^{12}$ = 11047 €. Lässt man sich die **täglichen** Zinsen auszahlen und legt sie ebenfalls gleich wieder an, so erhält man nach einem Jahr $10000\cdot\left(1+\frac{1}{360}\cdot\frac{1}{100}\right)^{360}$ = 11051 €. Da die Bank bei der Berechnung der Monats- und Tageszinsen die Selbstverzinsung nicht berücksichtigt und einfach durch die Zahl der Verzinsungsabschnitte teilt, kann man also auf diese Art den persönlichen Zinssatz steigern. Leonhard Euler aus Basel untersuchte im Jahr 1743 die Frage nach dem theoretisch maximalen Gewinn, der bei Übergang zu Monats-, Tages-, Stunden-, Sekunden-, usw. – Zinsen möglich ist. Der Einfachheit halber setzte er den Jahrszins p = 100 % an und erhielt das Ergebnis $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ = e ≈ 2,7182818…Dieses zunächst wie eine bedeutungslose Spielerei anmutende Ergebnis erwies sich als eine der wichtigsten Zahlen, die es in der Mathematik gibt. Euler selbst rechnete mit der sehr schnell konvergierenden Näherungsfolge e = 1 + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2\cdot 3}$ + $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$ + … + $\frac{1}{n!}$ + … und bewies u.a., dass die Funktion f(x) = e^x ihre eigene Ableitung ist: f'(x) = f(x) = e^x. Auch die Schreibweise „f(x)“ stammt von ihm. Die Exponentialzahl e (Euler selbst hat nie die heute gängige Bezeichnung „Eulerschen Zahl“ verwendet) ist außerdem eine der wenigen bekannten **transzendenten Zahlen**, d.h., sie lässt sich nicht durch Brüche oder Wurzeln ausdrücken. Obwohl die transzendenten Zahlen in ihrer Dichte auf dem Zahlenstrahl alle anderen rationalen und irrationalen Zahlen weit übertreffen, sind nur sehr wenige bekannt, u.a. die **Kreiszahl *π***, deren Bezeichnung ebenfalls von Euler stammt.

Die Konvergenz der Folge e_n = $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ wird in zwei Schritten gezeigt:

(e_n) steigt monoton: Für n ≥ 1 ist

$$\begin{aligned}
\frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\\
&= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\\
&= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}\\
&= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\\
&= \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\\
&= \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\\
&= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\,.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung von Bernoulli (Aufgaben zu Folgen Nr. 10 f)) besagt, dass $(1 + x)^n > 1 + nx$ für $n \geq 2$ und $x > -1$. Entsprechend gilt natürlich auch $(1 + x)^{n+1} > 1 + (n+1)x$ Setzt man $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$, so erhält man $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$. Daraus folgt durch Einsetzen weiter

$$\begin{aligned}\frac{e_{n+1}}{e_n} &> \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\\ &= 1.\end{aligned}$$

(e_n) ist nach oben beschränkt: Die Folge $f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ liegt stets oberhalb von e_n. Außerdem fällt sie aber monoton: Für $n \geq 1$ ist

$$\begin{aligned}\frac{f_n}{f_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}\\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\ &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)}\\ &= \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}\\ &= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}\\ &= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

Die Ungleichung von Bernoulli diesmal in der Form $(1 + x)^{n+2} > 1 + (n+2)x$ mit $x = \frac{1}{n(n+2)}$, ergibt wie oben $\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1 + \frac{n+2}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$. Daraus folgt durch Einsetzen weiter

$$\begin{aligned}\frac{f_n}{f_{n+1}} &> \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Da f_n oberhalb von e_n verläuft und monton fällt, liegen alle e_n z.B. unterhalb des ersten Folgenglieds $f_1 = 4$. Damit ist gezeigt: e_n steigt monoton, ist gleichzeitig aber nach oben beschränkt und muss daher gegen einen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ konvergieren.