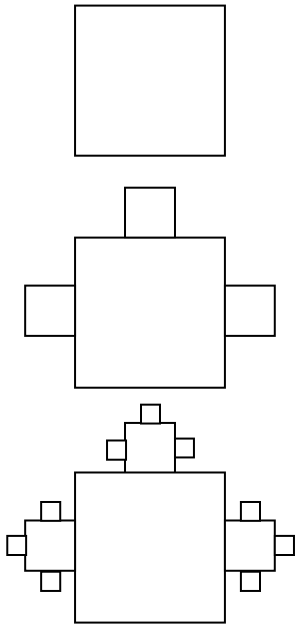
5.7. Aufgaben zu Folgen

Aufgabe 1: Lineares und beschränktes Wachstum

Aus einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 dm gehen auf die rechts angedeutete Weise neue Figuren hervor. Die im n-ten Schritt angefügten Quadrate sind jeweils nur $\frac{1}{3}$ so breit wie die im (n − 1)-ten Schritt angefügten Quadrate.



a) Berechne den Umfang U_n nach n = 0, 1, 2, 3 und 4 Schritten.
b) Wie groß ist der Zuwachs $U_{n+1} - U_n$ des Umfangs im n+1-ten Schritt?
c) Stelle eine Formel auf, mit der sich U_{n+1} aus U_n berechnen lässt.
d) Stelle eine Formel auf, mit der sich U_n direkt aus n berechnen lässt.
e) Berechne den Flächeninhalt A_n der Figur nach n = 1, 2, 3 und 4 Schritten
f) Wie groß ist der Zuwachs $A_{n+1} - A_n$ der Fläche im n+1-ten Schritt?
g) Stelle eine Formel auf, mit der sich A_{n+1} aus A_n berechnen lässt.
h) Stelle eine Formel auf, mit der sich A_n direkt aus n berechnen lässt.
   Hinweis: $1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
i) Berechne A_{100} und U_{100} und vergleiche. Welche Aussage lässt sich aus diesem Beispiel über den Umfang und die Fläche natürlicher Gebilde wie z. B. des Landes Baden-Württemberg ableiten?
j) Berechne den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Aufgabe 2: Berechnung von Folgengliedern aus gegebenen expliziten und rekursiven Formeln

Berechne die ersten 5 Folgenglieder a_0, ..., a_4:

a) $a_n = 100 \cdot 2^{-n}$
b) $a_n = 100 - 50 \cdot 2^{-n}$
c) $a_n = \frac{1}{n+1}$
d) $a_n = (n + 1)(n + 2)$
e) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$ mit $a_0 = 3$
f) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} a_n$ mit $a_0 = 3$
g) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(5 - a_n)$ mit $a_0 = 3$
h) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{20} a_n \cdot (5 - a_n)$ mit $a_0 = 3$

Aufgabe 3: Bestimmung von expliziten und rekursiven Formeln aus gegebenen Folgengliedern

Stelle die explizite und die rekursive Formel für die gegebenen Folgenglieder auf:

a) $a_0 = 1$; $a_1 = 3$; $a_2 = 5$; $a_3 = 7$; $a_4 = 9$
b) $a_0 = 3$; $a_1 = 6$; $a_2 = 12$; $a_3 = 24$; $a_4 = 48$
c) $a_0 = 2$; $a_1 = 6$; $a_2 = 18$; $a_3 = 54$; $a_4 = 162$
d) $a_0 = 2$; $a_1 = 5$; $a_2 = 10$; $a_3 = 17$; $a_4 = 26$
e) $a_0 = 0$; $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{2}{3}$; $a_3 = \frac{3}{4}$; $a_4 = \frac{4}{5}$
f) $a_0 = 1$; $a_1 = \frac{2}{3}$; $a_2 = \frac{4}{9}$; $a_3 = \frac{8}{27}$; $a_4 = \frac{16}{81}$
g) $a_0 = -1$; $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{7}{5}$; $a_3 = \frac{11}{7}$; $a_4 = \frac{5}{3}$
h) $a_0 = 0$; $a_1 = \frac{2}{3}$; $a_2 = \frac{4}{9}$; $a_3 = \frac{1}{3}$; $a_4 = \frac{16}{81}$

Aufgabe 4: Bestimmung von rekursiven Darstellungen aus expliziten Formeln

Gib eine rekursive Beschreibung für die folgenden Folgen an:

a) $a_n = 3n + 2$ b) $a_n = n^2 - 2n$ c) $a_n = 3^{-n}$ d) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Aufgabe 5: Bestimmung von expliziten Formeln aus rekursiven Darstellungen

Gib eine explizite Beschreibung für die folgenden Folgen an:

a) $a_{n+1} = a_n - 3$ mit $a_0 = 2$
b) $a_{n+1} = 0{,}8 \cdot a_n$ mit $a_0 = 20$
c) $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$ mit $a_0 = 0$
d) $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ mit $a_0 = 0$

Aufgabe 6: Monotonie einer Folge

Untersuche die folgenden Folgen auf Monotonie und begründe anhand der Definition.

a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ b) $a_n = \sqrt{n^2 - n}$ c) $a_n = n^3 - 3n^2$ d) $a_n = n^2 \cdot 2^{-n}$

Aufgabe 7: Beschränktheit einer Folge
Untersuche die folgenden Folgen auf Beschränktheit und begründe anhand der Definition.

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ b) $a_n = \sqrt{n^2 + n}$ c) $a_n = n^2 - n^3$ d) $a_n = n^2 \cdot 3^{-n}$

Aufgabe 8: Grenzwert einer Folge
Gib den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ an und begründe anhand der Definition.

a) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ b) $a_n = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 + n}$ c) $a_n = \frac{1}{n}\sin n$ d) $a_n = n^3 \cdot 2^{-n}$

Aufgabe 9: Grenzwert einer Folge
Untersuche die Folge (a_n) mit Hilfe von Beschränktheit und Monotonie auf Konvergenz

a) $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ c) $a_n = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n}$

b) $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2}$ d) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}$

Aufgabe 10: Vollständige Induktion
Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion:
a) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$ für $n \geq 1$
b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$ für $n \geq 1$
c) $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots. + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ für $n \geq 1$
d) 7 teilt $8^n - 1$ für $n \geq 1$
e) 6 teilt $n^3 - n$ für $n \geq 2$
f) $(1 + x)^n > 1 + nx$ für $n \geq 2$, $x > -1$ und $x \neq 0$ (**Bernoulli-Ungleichung**)

5.7. Lösungen zu den Aufgaben zu Folgen

Aufgabe 1: Lineares und beschränktes Wachstum
Alle Strecken in dm, alle Flächen in dm^2:
a) $U_0 = 4$, $U_1 = 6$, $U_2 = 8$, $U_3 = 10$ und $U_4 = 12$
b) $U_{n+1} - U_n = 2$ (**lineares Wachstum**
c) $U_{n+1} = U_n + 2$ (**rekursive Formel**)
d) $U_n = 4 + 2n$ (**explizite Formel**)
e) $A_0 = 1$, $A_1 = 1 + \frac{1}{3} \approx 1{,}33$, $A_2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \approx 1{,}44$, $A_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \approx 1{,}48$ und $A_4 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \approx 1{,}49$
f) $A_{n+1} - A_n = 3^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ (**beschränktes Wachstum**)
g) $A_{n+1} = A_n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ (**rekursive Formel**)
h) $A_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1-1/3^{n+1}}{1-1/3} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.(**explizite Formel**)
i) $U_{100} = 204$ und $A_{100} \approx 1{,}5 \Rightarrow$ Der Umfang wächst unbeschränkt aber die Fläche nähert sich einem **Grenzwert**.
j) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{3}{2}$

Aufgabe 2: Berechnung von Folgengliedern aus expliziten und rekursiven Formeln
a) $a_0 = 100$; $a_1 = 50$; $a_2 = 25$; $a_3 = 12{,}5$; $a_4 = 6{,}25$
b) $a_0 = 50$; $a_1 = 75$; $a_2 = 87{,}5$; $a_3 = 93{,}75$; $a_4 = 96{,}875$
c) $a_0 = 1$; $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{3}$; $a_3 = \frac{1}{4}$; $a_4 = \frac{1}{5}$
d) $a_0 = 2$; $a_1 = 6$; $a_2 = 12$; $a_3 = 20$; $a_4 = 30$
e) $a_0 = 3$; $a_1 = 3{,}5$; $a_2 = 4$; $a_3 = 4{,}5$; $a_4 = 5$
f) $a_0 = 3$; $a_1 = 4{,}5$; $a_2 = 6{,}75$; $a_3 = 10{,}125$; $a_4 = 15{,}1875$
g) $a_0 = 3$; $a_1 = 4$; $a_2 = 4{,}5$; $a_3 = 4{,}75$; $a_4 = 4{,}875$
h) $a_0 = 3$; $a_1 = 3{,}3$; $a_2 \approx 3{,}74$; $a_3 \approx 3{,}98$; $a_4 = 4{,}18$

Aufgabe 3: Bestimmung von expliziten und rekursiven Formeln aus Folgengliedern
a) $a_{n+1} = a_n + 2$ mit $a_0 = 1 \Rightarrow a_n = 1 + 2n$
b) $a_{n+1} = 2a_n$ mit $a_0 = 3 \Rightarrow a_n = 3 \cdot 2^n$
c) $a_{n+1} = 3a_n$ mit $a_0 = 2 \Rightarrow a_n = 2 \cdot 3^n$
d) $a_{n+1} = a_n + 2n + 3$ mit $a_0 = 2 \Rightarrow a_n = n^2 + 1$
e) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ mit $a_0 = 0 \Rightarrow a_n = \frac{n}{n+1}$
f) $a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n$ mit $a_0 = 1 \Rightarrow a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
g) $a_{n+1} = a_n + \frac{6}{(2n+3)(2n+1)}$ mit $a_0 = -1 \Rightarrow a_n = \frac{4n-1}{2n+1}$
h) $a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 a_n$ für $n \geq 1$ mit $a_1 = 1$ und $a_0 = 0 \Rightarrow a_n = \frac{n^2}{3^n}$

Aufgabe 4: Bestimmung von rekursiven Formeln aus expliziten Formeln
a) $a_{n+1} = a_n + 3$ mit $a_0 = 2$
b) $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$ mit $a_0 = 0$
c) $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ mit $a_0 = 1$
d) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ mit $a_0 = 0$

Aufgabe 5: Bestimmung von expliziten Formeln aus rekursiven Darstellungen
a) $a_n = -3n + 2$ b) $a_n = 20 \cdot 0{,}8^n$ c) $a_n = n(n + 1)$ d) $a_n = n^2$

Aufgabe 6: Monotonie einer Folge

a) monoton zunehmend, da $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n-1)} = \frac{n^2+n}{n^2+n-2} > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) monoton zunehmend, da $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{(n+1)^2-(n+1)}}{\sqrt{n^2-n}} = \sqrt{\frac{n^2+n}{n^2-n}} > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) monoton zunehmend für $n \geq 2$, da $a_{n+1} - a_n = (n+1)^3 - 3(n+1)^2 - n^3 + 3n^2 = 3n^2 - 3n - 2 = 3(n^2 - n - \frac{2}{3}) > 0$ für $n \geq 2$

d) monoton abnehmend für $n \geq 2$, da $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 \cdot 2^{-(n+1)} - n^2 \cdot 2^{-n} = 2^{-(n+1)}(n^2 + 2n + 1 - 2n^2) = 2^{-(n+1)}(-n^2 + 2n + 1) < 0$ für $n \geq 2$

Aufgabe 7: Beschränktheit einer Folge

a) Obere Schranke $S_o = 1$, weil $a_n \leq 1 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und untere Schranke $S_u = 0$, weil $a_n \geq 0 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

b) Keine obere Schranke S, da es kein $S \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leq S \Leftrightarrow \sqrt{n^2+n} \leq S \Leftrightarrow n^2 + n \leq S^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist und untere Schranke $S_u = 0$, weil $a_n \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{n^2+n} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Obere Schranke $S_o = 0$, weil $a_n \leq 0 \Leftrightarrow n^2 - n^3 \leq 0 \Leftrightarrow n^2(1-n) \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und keine untere Schranke S, da es kein $S \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \geq S \Leftrightarrow n^2 - n^3 \geq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$

d) Obere Schranke $S_o = 1$, weil $a_n \leq 1 \Leftrightarrow n^2 \cdot 3^{-n} \leq 1 \Leftrightarrow n^2 \leq 3^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und untere Schranke $S_u = 0$, da $n^2 \cdot 3^{-n} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 8: Grenzwert einer Folge

Zu zeigen ist, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_e gibt, so dass die Ungleichung: $|a_\varepsilon - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$ erfüllt ist.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, da $|a - a_n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |1 - \frac{n+2}{n+1}| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 \leq n$ erfüllt ist für alle $n \geq n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, da $|a - a_n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |1 - \frac{1}{n}\sqrt{n^2+n}| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |1 - \sqrt{1+\frac{1}{n}}| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1 - \varepsilon \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq (1-\varepsilon)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1-(1-\varepsilon)^2} \leq n \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon(2-\varepsilon)} \leq n$ erfüllt ist für alle $n \geq n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon(2-\varepsilon)}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, da $|a - a_n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{n}\sin n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq n$ erfüllt ist für alle $n \geq n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, da $|a - a_n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |n^3 \cdot 2^{-n}| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq \frac{2^n}{n^3}$ erfüllt ist für alle $n \geq 10$

Aufgabe 9: Grenzwert einer Folge

a) a_n ist monoton steigend, da $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (a_n) ist nach oben beschränkt, da $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}dx = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 2 - \frac{1}{n} < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (a_n) muss daher gegen einen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq 2$ konvergieren. L. Euler zeigt im Jahr 1736, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}64$

b) a_n ist monoton steigend, da $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(2n+3)^2} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (a_n) ist nach oben beschränkt, da

$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{(2n+1)^2} < 1 + \int_0^n \frac{1}{(2x+1)^2}dx = 1 + \left[-\frac{1}{2(2x+1)}\right]_0^n = \frac{3}{2} - \frac{1}{4n+2} < \frac{3}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (a_n) muss daher gegen einen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n \le \frac{3}{2}$ konvergieren. L. Euler zeigte im Jahr 1736, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi^2}{8} \approx 1{,}23$

c) a_n ist monoton steigend, da $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3^n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (a_n) ist nach oben beschränkt, da

$a_n = 1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^n} < \int_{-1}^n \frac{1}{3^x}dx = \int_{-1}^n e^{-\ln 3\cdot x}dx = \left[-\frac{1}{\ln 3}e^{-\ln 3\cdot x}\right]_{-1}^n = \frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3\cdot 3^n} < \frac{3}{\ln 3}$

für alle $n \in \mathbb{N}$. (a_n) muss daher gegen einen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n \le \frac{3}{\ln 3}$ konvergieren. Der exakte Grenzwert ergibt sich durch Anwendung der Summenformel $a_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^n =$

$\frac{1-1/3^{n+1}}{1-1/3} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$ (siehe Aufgabe 1!)

d) a_n ist monoton steigend, da $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a_n) ist nach oben beschränkt, da $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n} < \int_0^n \frac{1}{n+x}dx = [\ln(n+x)]_0^n = \ln 2n - \ln n = \ln 2$ für alle $n \ge 1$ und $a_0 = 1$. (a_n) muss daher gegen einen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n \le \ln 2$ konvergieren

Aufgabe 10: Vollständige Induktion

a) **Induktionsanfang** $n = 1$: $2 = \cdot 1\cdot(1 + 1)$

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:
Induktionsannahme für ein beliebiges n: $2 + 4 + 6 +... + 2n = n(n + 1)$
zu zeigen ist die Behauptung für n + 1: $2 + 4 + 6 +... + 2n + 2(n + 2 = (n + 1)(n + 2)$
Linke Seite mit Einsetzen der Induktionsannahme:
$2 + 4 + 6 +... + 2n + 2(n + 2) = n(n + 1) + 2n + 2 = n^2 + 3n + 2$
Rechte Seite: $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n + 2$ **qed**

b) **Induktionsanfang** $n = 1$: $1^2 = \frac{1}{6} 1(1 + 1)(2 + 1) = 1$

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Induktionsannahme für ein beliebiges n: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1)$

zu zeigen ist die Behauptung für n + 1: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{1}{6}(n + 1)(n + 2)(2n + 3)$

Linke Seite mit Einsetzen der Induktionsannahme:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1) + (n + 1)^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1$

Rechte Seite: $\frac{1}{6}(n + 1)(n + 2)(2n + 3) = \frac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1$ **qed**

c) **Induktionsanfang** $n = 1$: $1 + x = \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1 + x$

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Induktionsannahme für ein beliebiges n: $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

zu zeigen ist die Behauptung für n + 1: $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$

Linke Seite mit Einsetzen der Induktionsannahme:

$x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$ **qed**

d) **Induktionsanfang** n = 1: 7 teilt $8^1 - 1 = 7$

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:
Induktionsannahme für ein beliebiges n: 7 teilt $8^n - 1$
zu zeigen ist die Behauptung für n + 1: 7 teilt $8^{n+1} - 1 = 8 \cdot 8^n - 1 = 7 \cdot 8^n + 8^n - 1$
Offensichtlich ist der linke Summand $7 \cdot 8^n$ durch 7 teilbar. **Nach Induktionsannahme** ist auch der rechte Summand 8n − 1 durch 7 teilbar und damit die ganze Summe. **qed**

e) **Induktionsanfang** n = 1: 6 teilt $2^3 - 2 = 6$

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:
Induktionsannahme für ein beliebiges n: 6 teilt $n^3 - n$
zu zeigen ist die Behauptung für n + 1: 6 teilt $(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 + 3n^2 + 2n = (n^3 - n) + (3n^2 + 3n) = (n^3 - n) + 6 \cdot \frac{1}{2} n(n + 1)$

Nach Induktionsannahme ist auch der linke Summand $n^3 - n$ durch 6 teilbar. Da entweder n oder n + 1 gerade ist, ist $\frac{1}{2} n(n + 1)$ eine ganze Zahl. Daher ist auch der rechte Summand $6 \cdot \frac{1}{2} n(n + 1)$ durch 6 teilbar und damit die ganze Summe. **qed**

f) **Induktionsanfang** n = 2: $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$, da $x^2 > 0$·

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:
Induktionsannahme für ein beliebiges n: $(1 + x)^n > 1 + nx$
zu zeigen ist die Behauptung für n + 1: $(1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)x$
Linke Seite mit Einsetzen der Induktionsannahme:

$(1 + x)^{n+1}$ $(1 + x)^n(1 + x) > (1 + nx)(1 + x)$, da nach Voraussetzung $1 + x > 0$
$= 1 + (n + 1)x + x^2$
$> 1 + (n + 1)x$, da $x^2 > 0$ **qed**