5.7. Prüfungsaufgaben zu Folgen

Aufgabe 1: Explizite Darstellung (3)

a) Bestimmen Sie die explizite Darstellung der Folge (a_n) mit $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{2}{4}$, $a_2 = \frac{5}{9}$, $a_3 = \frac{5}{8}$, $a_4 = \frac{17}{25}$ und $a_5 = \frac{13}{18}$ (2)

b) Geben Sie den Grenzwert der Folge an (1)

Lösung

$a_n = \frac{n^2+1}{(n+1)^2}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

Aufgabe 2: Explizite Darstellung (3)

a) Bestimmen Sie die explizite Darstellung der Folge (a_n) mit $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{5}$, $a_3 = \frac{2}{5}$, $a_4 = \frac{9}{17}$ und $a_5 = \frac{8}{13}$ (2)

b) Geben Sie den Grenzwert der Folge an. (1)

Lösung

$a_n = \frac{(n-1)^2}{n^2+1}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

Aufgabe 3: Explizite und rekursive Darstellung (4)

a) Berechnen Sie die ersten 5 Glieder der Folge $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$ mit $a_1 = 2$ für $n \geq 1$ (2)

b) Geben Sie die explizite Darstellung der Folge an und begründen Sie. (4)

Lösung

a) $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{5}{2}$, $a_3 = \frac{8}{3}$, $a_4 = \frac{11}{4}$, $a_5 = \frac{14}{5}$ (2)

b) $a_n = \frac{3n-1}{n} = 3 - \frac{1}{n}$ (2)

denn $a_{n+1} - a_n = -\frac{3}{n+1} + \frac{3}{n}$ (1)

$= \frac{3(n+1)-3n}{n(n+1)}$ (0,5)

$= \frac{3}{n(n+1)}$ (0,5)

Aufgabe 4: Explizite und rekursive Darstellung (6)

a) Berechnen Sie die ersten 5 Glieder der Folge $a_{n+1} = a_n - \frac{3}{n(n+1)}$ mit $a_1 = 4$ für $n \geq 1$ (2)

b) Geben Sie die explizite Darstellung der Folge an und begründen Sie. (4)

Lösung

a) $a_1 = 4$, $a_2 = \frac{5}{2}$, $a_3 = 2$, $a_4 = \frac{7}{4}$, $a_5 = \frac{8}{5}$ (2)

b) $a_n = \frac{3+n}{n} = \frac{3}{n} + 1$, (2)

denn $a_{n+1} - a_n = \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n}$ (1)

$= \frac{3n - 3(n+1)}{n(n+1)}$ (0,5)

$= -\frac{3}{n(n+1)}$ (0,5)

Aufgabe 5: Explizite und rekursive Darstellung (Aufgabensatz A 2004) (6)

a) Berechnen Sie die ersten 5 Glieder der Folge $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ mit $a_1 = \frac{1}{3}$ für $n \geq 1$ (2)

b) Geben Sie die explizite Darstellung der Folge an und begründen Sie. (4)

Lösung

a) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{2}{5}$, $a_3 = \frac{3}{7}$, $a_4 = \frac{4}{9}$, $a_5 = \frac{5}{11}$ (2)

b) $a_n = \frac{n}{2n+1}$, (2)

denn $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1}$ (0,5)

$= \frac{(n+1)(2n+1) - n(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)}$ (0,5)

$= \frac{2n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 3n}{(2n+1)(2n+3)}$ (0,5)

$= \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ (0,5)

Aufgabe 6: Beschränktes Wachstum (5)

Ein See wird seit Beginn der Stallhaltezeit im November über seine Zuflüsse durch 1 m^3 reine Gülle pro Tag bereichert. Durch den Abfluß wird jeden Tag 1 % der im See vorhanden Gülle wieder abgeführt. Den Sommer über war der See güllefrei.

a) Berechne den Güllegehalt G(t) nach 10 Tagen, wenn der See den Sommer über güllefrei war. (1)
b) Berechne den Güllegehalt G(t) nach 10 Tagen, wenn der See im Sommer bereits 50 m^3 Gülle enthielt. (1)
c) Zeige, dass die Entwicklung des Güllegehaltes dem Gesetz des beschränkten Wachstums folgt und gib die Sättigungsgrenze S sowie die prozentuale Änderungsrate p an (2)
d) Zeige: Wenn G(t) größer als S ist, fällt es monoton ab. Wenn G(t) kleiner als S ist, steigt es monoton an (1)

Lösung

a) $G(t+1) = 0{,}99 \cdot G(t) + 1$ mit $G(0) = 0 \Rightarrow G(5) = 9{,}56\ m^3$ (1)

b) $G(t+1) = 0{,}99 \cdot G(t) + 1$ mit $G(0) = 50 \Rightarrow G(5) = 54{,}78\ m^3$ (1)

c) $G(t+1) = 0{,}99 \cdot G(t) + 1 \Leftrightarrow G(t+1) - G(t) = 0{,}01 \cdot [100 - G(t)]$ (1)

$\Rightarrow$ beschränktes Wachstum mit S = 100 m^3 und p = 1 % (1)

d) $G(t+1) - G(t) = 0{,}01 \cdot [100 - G(t)] > 0 \Leftrightarrow$ G(t) steigt monoton, wenn G(t) < 100 und umgekehrt (1)

Aufgabe 7: Beschränktes Wachstum (10)
Ein Gebirgsbach mit einem Volumenstrom von 1000 m^3 pro Tag wird durch einen Erdrutsch auf einer flachen Wiese zu einem kleinen Teich gestaut. Dort hatten sich infolge eines Regengusses schon vorher 3000 m^3 Wasser gesammelt. Pro Tag versickern 40 % des gestauten Wassers in der Wiese.

a) Berechnen Sie das Teichvolumen nach 5 Tagen. (1)
b) Zeigen Sie, dass die Entwicklung der gestauten Wassermenge dem Gesetz des beschränkten Wachstums folgt und geben Sie die Sättigungsgrenze S sowie die prozentuale Änderungsrate p an (4)
c) Formulieren Sie die explizite Formel für das Teichvolumen W_n nach n Tagen (2)
d) Untersuchen Sie die Folge W_n auf Monotonie und Beschränktheit und begründen Sie. (2)
e) Zeigen Sie, dass die Folge W_n konvergiert. (1)

Lösung

a) $W_{n+1} = 0{,}6\cdot W_n + 1000$ mit $W_0 = 3000 \Rightarrow W_n = 2500 + 500\cdot 0{,}4^n \Rightarrow W_5 = 2505{,}12\ m^3$. (1)
b) $W_{n+1} = 0{,}6\cdot W_n + 1000 = W_n + 0{,}4(2500 - W_n)$ mit W_n in m^3 und n in Tagen seit Erdrutsch. (2)
Die Sättigungsgrenze ist $S = 2500\ m^3$ und die prozentuale Änderungsrate $p = 0{,}4$ (2)
c) $S - W_n = (S - W_0)\cdot 0{,}4^n \Leftrightarrow 2500 - W_n = -500\cdot 0{,}4^n \Leftrightarrow W_n = 2500 + 500\cdot 0{,}4^n$ (2)
d) W_n ist monoton fallend, da $W_{n+1} - W_n = 500\cdot 0{,}4^{n+1} - 500\cdot 0{,}4^n = 500\cdot 0{,}4^n(0{,}4 - 1) = -300\cdot 0{,}4^n < 0$ (1)
W_n ist nach unten beschränkt, da $W_n = 2500 + 500\cdot 0{,}4^n > 2500$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (1)
e) W_n ist monoton fallend und nach unten beschränkt und muss deshalb konvergieren. (1)

Aufgabe 8: Grenzwerte (3)

a) Geben Sie eine exakte Definition für den Grenzwert einer Folge. (3)
b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge mit dem Grenzwert 3. (1)

Lösung

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ heißt Grenzwert der Folge (a_n), wenn es für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ ein passendes n_0 gibt, so dass die Abweichung $|a - a_n| < \varepsilon$ wird für alle $n > n_0$. (3)
b) $a_n = 3 - \dfrac{1}{n}$ (1)

Aufgabe 9: Grenzwerte (5)

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Folge $a_n = \dfrac{3n+1}{2n-1}$ monoton fallen und nach unten beschränkt ist. Geben Sie ihren Grenzwert an. (3)
b) Von welchem n an weichen die Glieder der Folge um weniger als $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ von ihrem Grenzwert ab? (2)

Lösung

a) Monotonie: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{[3(n+1)+1][2n-1]}{[2(n+1)-1][3n+1]} = \dfrac{[3n+4][2n-1]}{[2n+1][3n+1]} = \dfrac{6n^2+5n-4}{6n^2+5n+1} < 1 \Rightarrow$ monoton fallend (2)
Beschränktheit nach unten: $a_n = \dfrac{3n+1}{2n-1} > \dfrac{3}{2}$, denn $3n + 1 > \dfrac{3}{2}(2n - 1) = 3n - \dfrac{3}{2}$ für alle $n \geq 1$. (1)
b) $\left|\dfrac{3n+1}{2n-1} - \dfrac{3}{2}\right| < \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow \dfrac{3n+1}{2n-1} - \dfrac{3}{2} < \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow \dfrac{2(3n+1)-3(2n-1)}{4n-2} < \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow 500 < 4n - 2 \Leftrightarrow n \geq 126$. (2)

Aufgabe 10: Grenzwerte (5)

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Folge $a_n = \dfrac{2n+1}{3n-1}$ monoton fallen und nach unten beschränkt ist. Geben Sie ihren Grenzwert an. (3)
b) Von welchem n an weichen die Glieder der Folge um weniger als $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ von ihrem Grenzwert ab? (2)

Lösung

a) Monotonie: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[2(n+1)+1][3n-1]}{[3(n+1)-1][2n+1]} = \frac{[2n+3][3n-1]}{[3n+2][2n+1]} = \frac{6n^2+7n-3}{6n^2+7n+2} < 1 \Rightarrow$ monoton fallend (2)

Beschränktheit nach unten: $a_n = \frac{2n+1}{3n-1} > \frac{2}{3}$, denn $2n + 1 > \frac{2}{3}(3n - 1) = 2n - \frac{2}{3}$ für alle $n \geq 1$. (1)

b) $\left|\frac{2n+1}{3n-1} - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{2n+1}{3n-1} - \frac{2}{3} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{3(2n+1)-2(3n-1)}{9n-3} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 500 < 9n - 3 \Leftrightarrow n \geq 56.$ (2)