5.7. Prüfungsaufgaben zur vollständigen Induktion

Aufgabe 1: Rekursive Darstellung und vollständige Induktion (5)

a) Leiten Sie eine rekursive Formel für die Folge $a_n = 3 - \frac{1}{n}$ her. (2)

b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch vollständige Induktion. (3)

Lösung

a) $a_{n+1} = 3 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ (2)

b) n = 1: linke Seite: $a_1 = 2$ (gegeben), rechte Seite: $a_1 = 3 - \frac{1}{1} = 2$

$n \Rightarrow n + 1$: linke Seite $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)} = 3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = 3 - \frac{1}{n+1}$, rechte Seite $a_{n+1} = 3 - \frac{1}{n+1}$

(3)

Aufgabe 2: Rekursive Darstellung und vollständige Induktion (5)

a) Leiten Sie eine rekursive Formel für die Folge $a_n = \frac{3}{n} + 1$ her. (2)

b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch vollständige Induktion. (3)

Lösung

a) $a_{n+1} = \frac{3}{n+1} + 1 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n} = -\frac{3}{n\cdot(n+1)}$ (2)

b) n = 1: linke Seite: $a_1 = 4$ (gegeben), rechte Seite: $a_1 = \frac{3}{1} + 1 = 4$

$k \Rightarrow k + 1$: linke Seite $a_{n+1} = a_n - \frac{3}{n(n+1)} = \frac{3}{n} + 1 - \frac{3}{n(n+1)} = \frac{3}{n+1} + 1$, rechte Seite $a_{n+1} = \frac{3}{n+1} + 1$.

(3)

Aufgabe 3: Rekursive Darstellung und vollständige Induktion (6)

a) Die Folge (b_n) ist rekursiv gegeben durch $b_0 = 1$ und $b_n = b_{n-1} + 0{,}2\cdot(5 - b_{n-1})$ für $n \geq 1$.
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für $n \geq 0$ gilt $b_n = 5 - 4\cdot 0{,}8^n$.

b) Die Folge (c_n) ist gegeben durch $c_0 = 1$ und $c_n = c_{n-1} + 0{,}2\cdot(5{,}2 - c_{n-1})$ für $n \geq 1$.
Geben Sie eine explizite Darstellung für c_n an.

Lösung

a) Induktionsstart n = 0: $1 = 5 - 4\cdot 0{,}8^0 = 5 - 4$. (0,5)

Induktionsschritt $n - 1 \Rightarrow n$:

Annahme:	$b_{n-1} = 5 - 4\cdot 0{,}8^{n-1}$	(0,5)
Zu zeigen:	$b_n = 5 - 4\cdot 0{,}8^n$	(0,5)
Einsetzen:	$b_n = b_{n-1} + 0{,}2\cdot(5 - b_{n-1})$	(0,5)
	$= 5 - 4\cdot 0{,}8^{n-1} + 0{,}2\cdot(5 - (5 - 4\cdot 0{,}8^{n-1}))$	(0,5)
	$= 5 - 4\cdot 0{,}8^{n-1} + 0{,}2\cdot 4\cdot 0{,}8^{n-1}$	(0,5)
	$= 5 - 4\cdot 0{,}8^{n-1}(1 - 0{,}2)$	(0,5)
	$= 5 - 4\cdot 0{,}8^n$	(0,5)

b) Explizite Darstellung: $c_n = 5{,}2 - 4{,}2\cdot 0{,}8^n$. (Beschränktes Wachstum) (2)
(Beweis: $c_n = c_{n-1} + 0{,}2\cdot(5{,}2 - c_{n-1}) = 5{,}2 - 4{,}2\cdot 0{,}8^{n-1} + 0{,}2\cdot 4{,}2\cdot 0{,}8^{n-1} + 5{,}2 - 4{,}2\cdot 0{,}8^{n-1}(1 - 0{,}2) = 5{,}2 - 4{,}2\cdot 0{,}8^n$.)

Aufgabe 4: vollständige Induktion (5)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ für } n \geq 1.$$

Lösung:

Induktionsstart n = 1: $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$. (1)

Induktionsschritt n ⇒ n + 1:

Annahme: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$ (1)

Zu zeigen: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$ (1)

linke Seite: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}$

$= \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}$

$= \frac{n \cdot (n+2)+1}{(n+1) \cdot (n+2)}$ (0,5)

$= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1) \cdot (n+2)}$ (0,5)

$= \frac{(n+1)^2}{(n+1) \cdot (n+2)}$ (0,5)

$= \frac{n+1}{n+2}$ = rechte Seite (0,5)

Aufgabe 5: vollständige Induktion (5)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (3n - 1)$ für $n \geq 1$.

Lösung:

Induktionsstart n = 1: $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (3 - 1) = \frac{1}{2} \cdot 2$ (1)

Induktionsschritt n ⇒ n + 1:

Annahme: $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (3n - 1)$ (1)

Zu zeigen: $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) + (3(n + 1) - 2) = \frac{1}{2} \cdot (n + 1) \cdot (3(n + 1) - 1)$ (1)

linke Seite: $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) + (3(n + 1) - 2)$

$= \frac{1}{2} \cdot n \cdot (3n - 1) + (3(n + 1) - 2)$

$= \frac{1}{2} \cdot 3n^2 - \frac{1}{2} n + 3n + 3 - 2$ (0,5)

$= \frac{3}{2} n^2 + \frac{5}{2} n + 1$ (0,5)

rechte Seite: $\frac{1}{2} \cdot (n + 1) \cdot (3(n + 1) - 1)$

$= \frac{1}{2} (n + 1)(3n + 2)$ (0,5)

$= \frac{1}{2} (3n^2 + 5n + 2)$ = linke Seite (0,5)

Aufgabe 6: Vollständige Induktion (3)

Beschreiben Sie an einem selbst gewählten Beispiel oder dem Beispiel von Aufgabe 2 die wesentlichen Schritte des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion.

Aufgabe 7: Vollständige Induktion (4)
An einem Fest nehmen $n \geq 1$ **Paare** teil. Dabei werden alle **Personen** mit Ausnahme des eigenen Partners mit begrüßt. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass dabei insgesamt $2n^2 - 2n$ Begrüßungen stattfinden.

Lösungen zu den Aufgaben 6 und 7 (3 + 3)

1. Die vollständige Induktion ist ein Beweisprinzip für Aussagen A_n, die in Abhängigkeit von einem natürlichen Parameter $n \in \mathbb{N}$ getroffen werden.
   Beispiel Aufgabe 2: Bei n Paaren finden $B_n = 2n^2 - 2n$ Begrüßungen statt, wobei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. (1 + 0)
2. Induktionsstart $n = n_0$: Man beweist zunächst A_{n0} für der kleinsten Wert n_0, den n annehmen kann.
   Beispiel Aufgabe 2: Bei $n_0 = 1$ Paar findet $2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 0$ Begrüßung statt. Die Aussage A_{n0} gilt offensichtlich. (1 + 1)
3. Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$: Man beweist A_{n+1} unter der Induktionsvoraussetzung, dass A_n gilt.
   Beispiel Aufgabe 2: Induktionsvoraussetzung: Bei n Paaren finden $B_n = 2n^2 - 2n$ Begrüßungen statt. Zu zeigen ist: Bei n + 1 Paaren finden $B_{n+1} = 2(n+1)^2 - 2(n+1) = 2n^2 + 4n + 2 - 2n - 2 = 2n^2 + 2n$ Begrüßungen statt. Beweis: Beide Partner des n + 1-ten Paares begrüßen alle 2 n bereits anwesende Personen. Es finden also $2 \cdot 2n = 4\,n$ zusätzliche Begrüßungen statt. Nach Induktionsvoraussetzung haben unter den n bereits anwesenden Paaren $B_n = 2n^2 - 2n$ Begrüßungen stattgefunden, so dass sich zusammen $B_{n+1} = B_n + 4n = 2n^2 + 2n$ Begrüßungen ergeben. Dies entspricht der Behauptung. (1 + 2)

Aufgabe 8 (4)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Funktion f mit $f(x) = \frac{x}{e^x}$; $x \in \mathbb{R}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (x-n)}{e^x}$ besitzt.

Lösung

Induktionsstart n = 1: $f(x) = x \cdot e^{-x}$ hat die Ableitung $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} = \frac{(-1)(x-1)}{e^x}$ (Produktregel) (1)

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$: Induktionsannahme $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^{-x}$ (0,5)

$\Rightarrow \quad f^{(n+1)}(x) = (-1)^n(1 \cdot e^{-x} - (x-n)e^{-x})$ (1)

$= (-1)^n(n + 1 - x)e^{-x}$ (0,5)

$= (-1)^{n+1}(x - (n+1))e^{-x}$ (0,5)

$= \frac{(-1)^{n+1}(x-(n+1))}{e^x}$ (0,5)

Aufgabe 9: Vollständige Induktion (10)
Beweisen Sie die folgende Summenformel für $n \geq 1$:

$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

a) mit vollständiger Induktion (5)
b) mit Hilfe der beiden folgenden Formeln:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Lösung:

a) **Induktionsstart n = 1:** $1 = \frac{1}{6}1(1 + 1)(1 + 2) = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3.$ (1)

Induktionsschritt n ⇒ n + 1:

Induktionsannahme $1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{1}{2}n(n + 1) = \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2).$ (1)

$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{1}{2}n(n + 1) + \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) = \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2) + \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2). \quad (1)$$

$$= \frac{1}{6}(n + 1)(n + 2)(n + 3) \quad (2)$$

b) $$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{1}{2}n(n + 1) = \frac{1}{2}(2 + 6 + 12 + 20 + \ldots + n^2 + n) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}[(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)] \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}n(n + 1) + \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)] \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n + 1)[3 + 2n + 1] \quad (0{,}5)$$

$$= \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2) \quad (0{,}5)$$

Aufgabe 10: vollständige Induktion (10)
Beweisen Sie die folgende Summenformel für $n \geq 1$:

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + ... + n\cdot(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$$

a) mit vollständiger Induktion
b) mit Hilfe der beiden folgenden Formeln:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$$

Lösung:

a) **Induktionsstart n = 1:** $2 = \frac{1}{3}1(1 + 1)(1 + 2) = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3.$ (1)

Induktionsschritt n ⇒ n + 1:

Induktionsannahme $2 + 6 + 12 + 20 + \ldots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2).$ (1)

$$2 + 6 + 12 + 20 + \ldots + n(n + 1) + (n + 1)(n + 2) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2) + (n + 1)(n + 2). \quad (1)$$

$$= \frac{1}{3}(n + 1)(n + 2)(n + 3) \quad (2)$$

b) $$2 + 6 + 12 + 20 + \ldots + n(n + 1) = 2 + 6 + 12 + 20 + \ldots + n^2 + n \quad (1)$$

$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}n(n + 1) + \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n + 1)[3 + 2n + 1] \quad (0{,}5)$$

$$= \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2) \quad (0{,}5)$$