5.7. Folgen

Die Beschreibung **natürlicher Wachstumsvorgänge** bei z.B. Populationen von Atomen, Bakterien oder Menschen, Anlagebeträgen, Börsenkursen oder Verkaufszahlen durch **stetige Funktionen** und **Differentialgleichungen** (siehe 1.9. und 2.6.) stellt eine teilweise recht grobe Vereinfachung dar, weil sich solche Bestände nicht kontinuierlich, sondern in **bestimmtem Zeitabständen sprunghaft** verändern. Viele dieser Vorgänge werden daher durch **Folgen** realistischer beschrieben.

5.7.1. Rekursive und explizite Darstellung von Folgen

Beispiel. Aufgaben zu Folgen Nr. 1

Definition
Eine Funktion mit D = $\mathbb{N}$ = {0; 1; 2; ...} nennt man **Folge**. Anstelle der Variablen x verwendet man den **Index n**; die Funktionswerte f(x) werden als **Folgenglieder a_n** bezeichnet.

Beispiel:

$f(x) = 2x - 3$ mit $D = \mathbb{R}$ ist eine Funktion

$a_n = 2n - 3$ mit $D = \mathbb{N}$ ist eine Folge

Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 2

Definition
1. Eine **explizite** (ausdrückliche) Formel gibt a_n in Abhängigkeit des **Indizes n** an. Jedes beliebige Folgenglied lässt sich einfach durch Einsetzen von n in die explizite Formel ausrechnen.
2. Eine **rekursive** (rückläufige) Formel gibt a_{n+1} in Abhängigkeit des **vorherigen Folgengliedes a_n** an. Das n+1-te Folgenglied lässt sich erst berechnen, wenn **alle vorherigen Folgenglieder** bekannt sind. Für die Berechnung von a_1 benötigt man außerdem die Angabe eines **Startwertes** a_0.

Beispiel: exponentielles Wachstum in expliziter und rekursiver Darstellung (siehe 4.7.4.)
Ein Kapital von a_0 = 1000 € wächst jedes Jahr um 15 %. Geben Sie eine rekursive und eine explizite Darstellung für das Kapital a_n nach n Jahren an.
Lösung:
rekursiv: $a_{n+1} = \cdot a_n + 0{,}15\, a_n = 1{,}15 \cdot a_n$ mit $a_0 = 1000$
explizit: $a_n = 1{,}15 \cdot a_{n-1} = 1{,}15^2 \cdot a_{n-2} = ... = 1{,}15^n \cdot a_0 = 1{,}15^n \cdot 1000$.

Beispiele für Näherungsfolgen aus der Analysis

1. rekursive Näherung der Quadratwurzel $\sqrt{a} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ mit $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ (siehe 5.7.5)
2. rekursive Näherung der Kreiszahl $\pi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ mit $\pi_{2n} = n\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{n}\right)^2}}$ (siehe 5.7.6 und 5.7.7)
3. explizite Näherung der Exponentialzahl $e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n$ mit $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (siehe 5.7.8)
4. rekursive Näherung einer Nullstelle $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ mit $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (siehe 5.3.6)

Definition.
1. Eine Folge der Form $a_n = d + a_{n-1} = d + d + a_{n-2} = ... = nd + a_0$ beschreibt eine **lineare Veränderung** mit **gleichen Differenzen** $d = a_n - a_{n-1}$ und heißt **arithmetische Folge**.
2. Eine Folge der Form $a_n = q \cdot a_{n-1} = q \cdot q \cdot a_{n-2} = ... = q^n \cdot a_0$ beschreibt eine **exponentielle Veränderung** mit **gleichen Quotienten** $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ und heißt **geometrische Folge**.

Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 3

Beispiel für die Bestimmung einer rekursiven Darstellung aus einer expliziten Formel
Gib eine rekursive Darstellung für die Folge $a_n = n^3 - 3n^2$ an.
Lösung:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= [(n+1)^3 - 3(n+1)^2] - [n^3 - 3n^2] \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 3n^2 - 6n - 3 - n^3 + 3n^2 \\ &= 3n^2 - 3n - 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ a_{n+1} = a_n + 3n^2 - 3n - 2$ mit $a_0 = 0$

Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 4

Summenformel von Leibniz

$$1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n = (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + ... = \frac{1}{2}n\cdot(n+1)$$

Beispiel für die Bestimmung einer expliziten Folge aus einer rekursiven Darstellung
Gib eine explizite Formel für die Folge $a_{n+1} = a_n + 4n - 2$ mit $a_0 = 1$ an.
Lösung:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 4(n-1) - 2 \\ &= a_{n-1} + 4n - 6 \\ &= a_{n-2} + 4(n-1) + 4n - 6 - 6 \\ &= a_{n-3} + 4(n-2) + 4(n-1) + 4n - 6 - 6 - 6 \\ &\ \ . \\ &\ \ . \\ &\ \ . \\ &= a_0 + 4(1 + 2 + 3 + ... + n) - n\cdot 6 = 4\cdot\frac{1}{2}n\cdot(n+1) - 6n \qquad |\ \textbf{Summenformel von Leibniz} \\ &= 1 + 2n^2 + 2n - 6n \\ &= 1 + 2n^2 - 4n \\ &= 2n(n-2) + 1 \end{aligned}$$

Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 5

5.7.2. Monotonie und Beschränktheit einer Folge (siehe auch 5.3.1.)

Definition
Eine Folge (a_n) heißt

- **monoton zunehmend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n \ \Leftrightarrow\ a_{n+1} - a_n \geq 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$
- **monoton abnehmend**, wenn $a_{n+1} \leq a_n \ \Leftrightarrow\ a_{n+1} - a_n \leq 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$

für alle $n \in \mathbb{N}$

Beispiel:
Untersuche die Folge $a_n = n^3 - 16n$ auf Monotonie
Lösung:

$a_{n+1} - a_n = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 16n - 16 - n^3 + 16n = 3n^2 + 3n - 15 = 3(n^2 + n - 5) > 0$ für $n \geq 3 \Rightarrow a_n$ steigt monoton für $n \geq 3$. Für $n < 3$ nimmt sie ab.

Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 6

Definition
Eine Folge (a_n) heißt

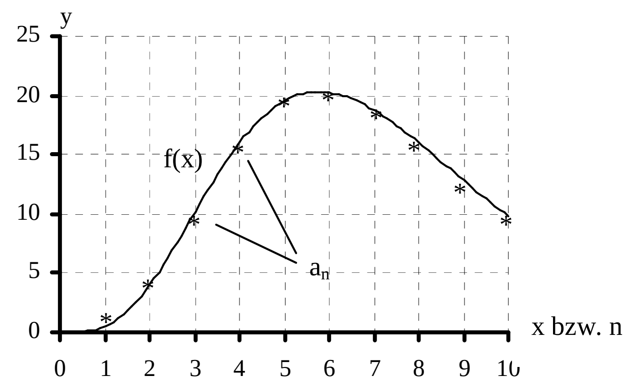
- **nach oben beschränkt**, wenn $a_n \leq S$
- **nach unten beschränkt**, wenn $a_n \geq S$

für eine obere bzw. untere **Schranke** $S \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$

Beispiel:
Untersuche die Folge $a_n = n^4\cdot 2^{-n}$ auf Beschränktheit und begründe.

Lösung:

a_n ist nach unten beschränkt, da $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. a_n ist nach oben beschränkt, da $a_n < 100 \Leftrightarrow n^4 \cdot 2^{-n} < 100 \Leftrightarrow n^4 < 100 \cdot 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Zur Begründung kann auch die entsprechenden Funktion $f(x) = x^4 \cdot 2^{-x} = x^4 \cdot e^{-\ln 2 \cdot x}$ für $x > 0$ herangezogen werden: Wegen
$f'(x) = 4x^3 e^{-\ln 2 \cdot x} + x^4(-\ln 2) e^{-\ln 2 \cdot x}$
$= (4 - \ln 2 \cdot x) x^3 e^{-\ln 2 \cdot x}$
(Ketten- und Produktregel siehe 2.4.1. - 2.4.3.)
swird der Hochpunkt bei $x = \frac{4}{\ln 2} \approx 5{,}78$ erreicht, d.h. bei der entsprechenden Folge werden die maximalen Werte bei $n = 5$ mit $a_5 = 19{,}53$ und $n = 6$ mit $a_6 \approx 20{,}25$ erreicht.



Da Exponentialfunktionen schneller wachsen als alle Potenzfunktionen oder mit l'Hospital (siehe 2.4.4.) begründet man außerdem, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} x^4 \cdot 2^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4}{2^x} = 0$.

Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 7

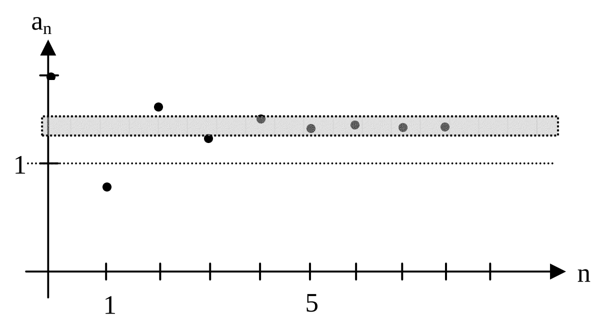
5.7.3. Grenzwert einer Folge für n → ∞ (siehe auch 5.1.1.)

Definition
Eine Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert a, wenn es für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ ein n_ε gibt, so dass alle Folgenglieder jenseits von n_ε um weniger als ε vom Grenzwert abweichen: $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$. Man schreibt dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Beispiel
Von welchem n_ε an liegen die Glieder der Folge $a_n = (-2)^{-n} + 1$ um weniger als $\varepsilon = 0{,}1$ bzw. $0{,}01$ bzw. $0{,}001$ vom Grenzwert $a = 1$ ab?
Lösung:

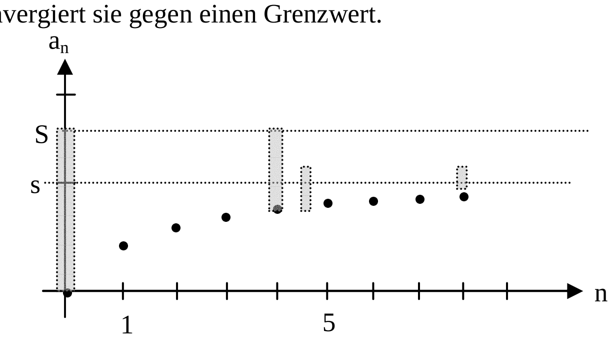
$|a_n - a| < \varepsilon$
$|(-2)^{-n}| < \varepsilon$
$2^{-n} < \varepsilon$
$-n \ln 2 < \ln \varepsilon$
$n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$

$\Rightarrow n_{0,1} = 4$, $n_{0,01} = 7$ und $n_{0,001} = 10$



Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 8

Satz: Wenn eine Folge monoton und beschränkt ist, so konvergiert sie gegen einen Grenzwert.
Beweis: Angenommen, (a_n) ist monoton steigend und durch S nach oben beschränkt. Dann läßt sich mit der folgenden rekursiv definierten Intervallschachtelung die kleinste obere Schranke s bestimmen. $I_0 = [a_0; S]$ und I_n = obere Hälfte von I_{n-1}, falls in dieser noch Folgenglieder liegen bzw. untere Hälfte von I_{n-1}, falls in der oberen Hälfte keine Folgenglieder mehr liegen. Die Intervallgrenzen konvergieren wegen der Vollständigkeit der reellen Zahlen gegen genau einen Grenzwert s. s ist kleinste obere Schranke von (a_n), denn die Intervalle wurden so gebildet, das jeweils die obere Grenze eine obere Schranke der Folge ist, die untere Grenze aber nicht.



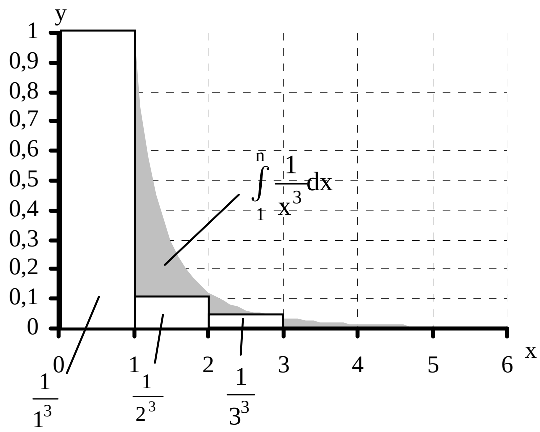
Beispiel zur Untersuchung einer Folge auf Konvergenz

Untersuche die Folge $a_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3}$ mit Hilfe von Beschränktheit und Monotonie auf Konvergenz

Lösung

a_n ist nach unten beschränkt, da $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. a_n ist nach oben beschränkt, da

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3} \\ &< 1 + \int_1^n \frac{1}{x^3}dx \\ &= 1 + \left[-\frac{2}{x^2}\right]_1^n \\ &= 1 - \frac{2}{n^2} + 2 \\ &= 3 - \frac{2}{n^2} \\ &< 3 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$



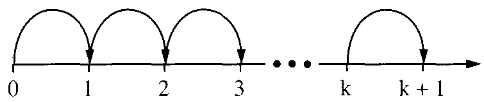
a_n ist monoton steigend, da $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^3} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. a_n muss daher gegen einen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n < 3$ konvergieren. Der Grenzwert dieser Folge ist bis heute nicht genau bekannt!!

Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 9

5.7.4. Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Beweisverfahren der vollständigen Induktion (Rekusionsbeweis)

Eine Formel, die für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig sein soll, lässt sich beweisen, indem man
1. Die Formel für n = 0 beweist (**Induktionsanfang**)
2. Die Formel für ein beliebiges n voraussetzt und mit dieser Annahme die Formel für n + 1 beweist. (**Induktionsschritt**)



Beispiel: (Leibniz-Summenformel)

Satz: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis:

Induktionsanfang n = 1: $1 = \cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1) = 1$

Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:

Induktionsannahme für ein beliebiges n: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

zu zeigen ist die Behauptung für n + 1: $1 + 2 + 3 + ... + n + n + 1 = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

Linke Seite mit Einsetzen der Induktionsannahme:

$1 + 2 + 3 + ... + n + n + 1 = \frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$

Rechte Seite: $\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$ **qed**

Übungen: Aufgaben zu Folgen Nr. 10