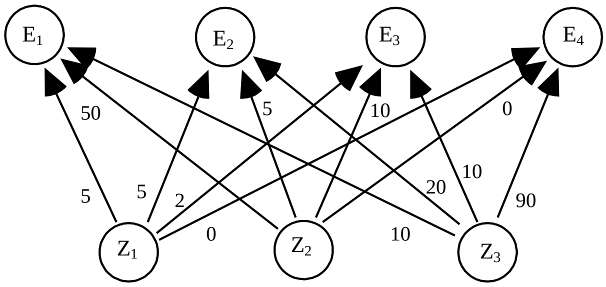
6.1. Anwendungsaufgaben zur Matrizenrechnung

Aufgabe 1: Ein- und zweistufige Verflechtung
Ein Unternehmen stellt 4 Endprodukte E_1, E_2, E_3 und E_4 her, für deren Herstellung 3 verschiedene Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 benötigt werden. Der folgende **Gozintograph** (Verballhornung von (that) "goes into") gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) Zwischenprodukte für die Herstellung von jeweils 1 ME Endprodukt enthalten ist:



	E_1	E_2	E_3	E_4
Z_1				
Z_2				
Z_3				

a) Beschreiben Sie die Verteilung der Zwischenprodukte auf die Endprodukte in Form der oben stehenden Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix.

b) In Teil a) geben die Elemente der Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B an, wie viele ME der Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 jeweils für die Herstellung von 1 ME der Endprodukte E_1, E_2, E_3 und E_4 benötigt werden. Wie lässt sich die Matrix B auf je 2 ME Endprodukte bzw. je 10 ME Endprodukte umrechnen?

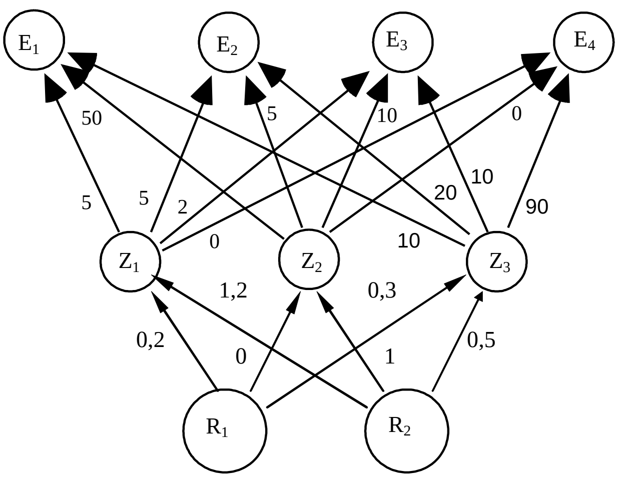
c) Die Matrix $B' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 1 \\ 45 & 5 & 9 & 2 \\ 10 & 25 & 9 & 70 \end{pmatrix}$ gibt die auf 100 g bezogene Zusammensetzung der neuen Produktlinie E_1', E_2', E_3' und E_4' an: Stellen Sie die Zu- bzw. Abnahme der Anteile der einzelnen Zwischenprodukte im Vergleich zu B in einer Matrix dar.

d) Die Kunden geben ihre Bestellmengen in ME für Endprodukte in Form von Listen bzw. (mathematisch ausgedrückt) **Spaltenvektoren** an. Eine Bestellung von 5 ME E_1, 2 ME E_2, 3 ME E_3 und 10 ME E_4 schreibt sich also als **Produktionsvektor** $\vec{p} = (5; 2; 3; 10)^T$. Wie viele ME Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 werden für die Realisierung dieses Auftrags benötigt? Geben Sie die benötigten Mengen in Form eines **Zwischenproduktvektors** $\vec{z} = (z_1; z_2; z_3)^T$ an.

e) Berechnen Sie den Bedarf $\vec{z}$ an Zwischenprodukten für die Produktionsvektoren $\vec{p}_1 = (1; 1; 1; 1)^T$, $\vec{p}_2 = (2; 2; 2; 2)^T$, $\vec{p}_3 = (50; 20; 30; 100)^T$ und $\vec{p}_4 = (100; 0; 0; 100)^T$

f) Am Ende des Jahres befinden sich im Lager noch 204 ME Z_1, 340 ME Z_2 und 850 ME Z_3. Wie viele ME E_1, E_2, E_3 und E_4 können aus diesen Zwischenprodukten hergestellt werden? Gelingt es, den Lagerbestand restlos aufzubrauchen?

g) Das folgende erweiterte Verflechtungsdiagramm gibt zusätzlich an, wie viele ME Rohstoffe R_1 und R_2 bei der Herstellung von jeweils 1 ME der Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 benötigt werden. Berechnen Sie die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix C, die den Rohstoffbedarf für die Produktion von jeweils 1 ME der Endprodukte E_1, E_2, E_3 und E_4 angibt. Berechnen Sie damit den Rohstoffbedarf für $\vec{p}_1$.



Hinweis Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B haben die folgende Gestalt:

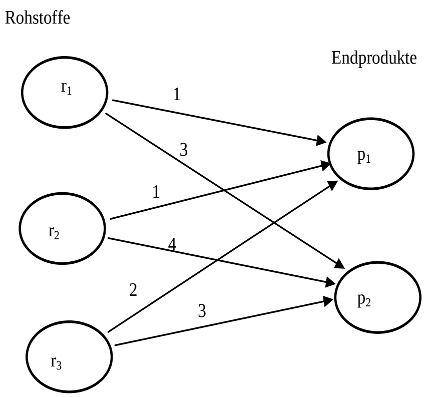
	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	**0,2**	**0**	**0,3**
R_2	1,2	1	0,5

	E_1	E_2	E_3	E_4
Z_1	**5**	5	2	0
Z_2	**50**	5	10	0
Z_3	**10**	20	10	90

Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix C muss also 4 Spalten und 2 Zeilen aufweisen:

	E_1	E_2	E_3	E_4
R_1				
R_2				

Aufgabe 2: Einstufige Verflechtung mit Rohstoffkosten
Ein Betrieb fertigt zwei verschiedene Endprodukte p_1 und p_2 unter Verwendung von drei verschiedenen Rohstoffen r_1, r_2 und r_3. Das folgende Verflechtungsdiagramm gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) Rohstoffe für die Produktion von jeweils 1 ME Endprodukten benötigt werden



		Endprodukte	
		p_1	p_2
Rohstoffe	r_1		
	r_2		
	r_3		

a) Füllen Sie die obige Input-Output-Tabelle aus und formulieren Sie die Matrizengleichung auf, die den allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Produktionsvektor $\vec{p} = (p_1;\ p_2)^T$ und dem zugehörigen Rohstoffvektor $\vec{r} = (r_1; r_2; r_3)^T$ beschreibt.
b) Wie viele Rohstoffe r_1, r_2 und r_3 werden benötigt, um 6 ME der Sorte p_1 und 3 ME der Sorte p_2 herzustellen?
c) Die auf je 1 ME bezogenen Rohstoffkosten in € werden durch den Vektor $\overrightarrow{k_r} = (5; 34; 23)^T$ gegeben. Wie groß ist der Gesamtwert der in b) zu bestellenden Einzelteile?

Aufgabe 3: Einstufige Verflechtung mit gegebenem Lagerbestand und Gewinnberechnung
Ein Betrieb stellt drei verschiedene Endprodukte p_1, p_2 und p_3 her und verwendet dafür drei Rohstoffe r_1, r_2 und $r_{3.}$ Dabei werden für die Herstellung von 1 ME der Sorte p_1 4 ME Rohstoffe der Sorte r_1, 8 ME der Sorte r_2 und 8 ME der Sorte r_3 benötigt. Die entsprechenden Mengen sind (2, 6, 4) für p_2 und (8, 10, 8) für p_3.

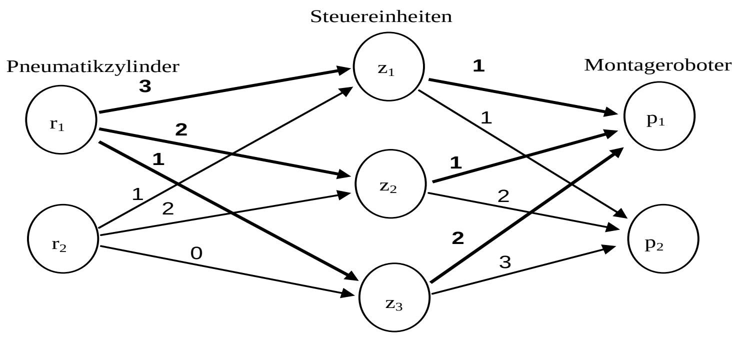
		Endprodukte			Lagerbestand
		p_2	p_2	p_3	
Rohstoffe	r_1				
	r_2				
	r_3				

a) Fassen Sie die Stücklisten in der obigen Input-Output Tabelle zusammen und stellen Sie den Zusammenhang zwischen Produktionsvektor $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ und Rohstoffvektor $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$ durch eine Matrizengleichung dar
b) Geben Sie an, wie viele Rohstoffe für die Produktion von 50 ME der Sorte p_1, 100 ME der Sorte p_2 und 60 ME der Sorte p_3 benötigt werden.
c) Zum Ende des Jahres soll möglichst der gesamte restliche Lagerbestand von 54 ME der Sorte r_1, 84 ME der Sorte r_2 und 68 ME der Sorte r_3 verbraucht werden. Prüfen Sie, ob dies möglich ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Mengen an Endprodukten p_1, p_2 und p_3, die aus diesen Lagerresten hergestellt werden können. (**Lösung**: $\vec{p} = (2, 3, 5)^T$)

d) Ein Kunde möchte insgesamt 20 ME Produkte kaufen und hat dafür ein Budget von 52280 € zur Verfügung. Er kann sowohl die unterste und ausschließlich für den Gebrauch an öffentlichen Einrichtungen vorgesehene Qualitätsklasse p_1 für 1889 €/ME als auch die Industriequalität p_2 für 5389 €/ME oder die höchste Reinheitsstufe p_3 mit Biosiegel für 6899 €/ME alternativ verwenden. Mit welcher Bestellung $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ kann er das gegebene Budget optimal ausschöpfen? Wie groß ist der Gesamtwert dieser Bestellung?

Aufgabe 4: Zweistufige Verflechtung mit gegebenem Lagerbestand

Eine Firma stellt zwei Montageroboter p_1 und p_2 unter Verwendung von drei Steuereinheiten z_1, z_2 und z_3 her. Für die Fertigung der Steuereinheiten werden zwei verschiedene Pneumatikzylinder r_1 und r_2 benötigt. Das nebenstehende Verflechtungsdiagramm gibt an, wie viele Steuereinheiten für die Herstellung von jeweils einem Montageroboter und wie viele Pneumatikzylinder für die Herstellung von jeweils einer Steuereinheit benötigt werden:



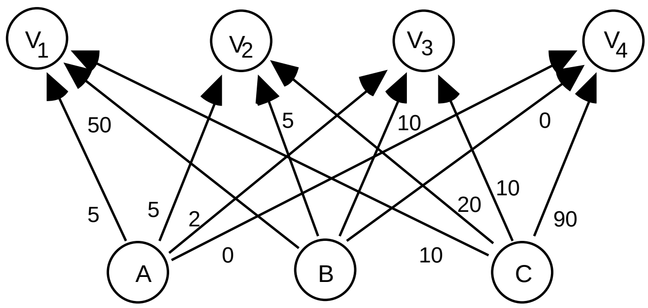
a) Stellen Sie den Zusammenhang zwischen dem Produktionsvektor $\vec{p} = (p_1; p_2)^T$ dem Zwischenproduktvektor $\vec{z} = (z_1; z_2; z_3)^T$ und dem Rohstoffvektor $\vec{r} = (r_1; r_2)^T$ durch zwei Matrizengleichungen dar.

b) Wie viele Pneumatikzylinder r_1 und r_2 werden für die Herstellung von 15 Montagerobotern p_1 und 12 Montagerobotern p_2 benötigt?

c) Im Lager sind noch 30 Pneumatikzylinder r_1 und 14 Pneumatikylinder r_2 vorhanden. Wie viele Montageroboter können davon hergestellt werden? Wie viele Pneumatikzylinder bleiben übrig? Wie viele Steuereinheiten können von den restlichen Pneumatikzylindern noch gefertigt werden?

Aufgabe 5: Einstufige Verflechtung mit Gewinnberechnung

Ein Betrieb der pharmazeutischen Industrie stellt 4 Vitaminpräparate V_1, V_2, V_3 und V_4 her, die die Vitamine A, B und C in unterschiedlichen Anteilen enthalten. Das folgende Verflechtungsdiagramm gibt an, wieviel Mengeneineinheiten (ME) Vitamin jeweils in 1 ME Präparat enthalten ist:



a) Stellen Sie die Matrizengleichung auf, die den allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Rohstoffvektor $\vec{r}$ und dem Produktionsvektor $\vec{p}$ beschreibt.

b) Berechnen Sie für den gegebenen Produktionsvektor $\vec{p} = (5; 3; 2; 10)^T$ den Rohstoffvektor $\vec{r} = (r_1; r_2; r_3)^T$, der die dafür benötigten Mengen an Vitamin A, B und C in g angibt.

c) Welche Bestellmengen $\vec{p}$ können aus einem Lagerrestbestand von $\vec{r} = (70; 600; 200)^T$ noch realisiert werden? Wie viel g der Präparate P_1, P_2 und P_4 können aus dem Rest hergestellt werden, wenn ein Kunde bloß 10 ME P_3 bestellt hat?

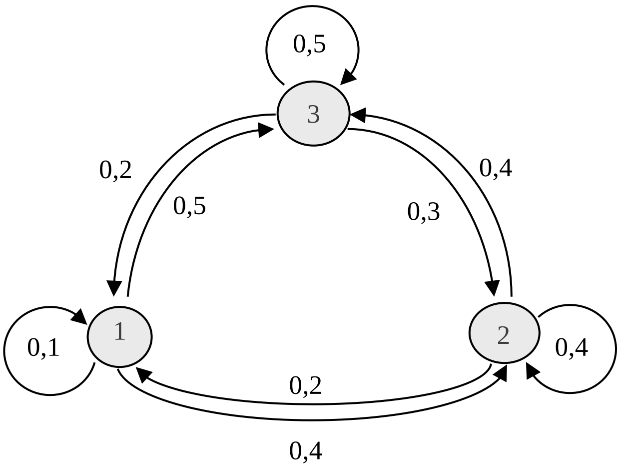
d) Der Preis- oder Ertragsvektor $\overrightarrow{e_p} = (159{,}95; 34{,}05; 41{,}95; 6{,}95)^T$ gibt den Verkaufspreis für jeweils 1 ME Präparate in € an. Wie hoch ist der Gesamtwert der Bestellung aus b)? Wie groß ist der Gesamtwert der aus d) übriggebliebenen Mengen?

e) Der Rohstoffkostenvektor $\overrightarrow{k_r}$ = (1,50; 2,50; 0,05)^T gibt die Kosten für jeweils 1 ME Vitamin A, B und C in € an. Berechnen Sie den Rohstoffkostenvektor $\overrightarrow{k_{rp}}$, der die Rohstoffkosten für jeweils 1 ME der Präparate P_1, P_2, P_3 und P_4 in € angibt

f) Der Fertigungskostenvektor $\overrightarrow{k_{fp}}$ = (2,00; 2;00; 1,50; 1,00) gibt die Fertigungskosten für jeweils 1 ME Präparat in € an. Welches Präparat bringt im Verkauf die höchste Gewinnspanne?

Aufgabe 6: Übergangsproblem und Markoff-Kette

Mit Hilfe der Matrizenrechnung sollen die Wanderungsbewegungen einer Populationen von Borstenschweinen über 3 Jahre hinweg beschrieben werden. In einem **Übergangsdiagramm** werden die Wanderungszahlen auf die jeweils im Vorjahr vorhandene Population bezogen, z.B. sind von der im Vorjahr vorhandenen Population im Revier 3 nach einem Jahr 50 % im Revier 3 geblieben, 20 % in Revier 1 gewechselt und 30 % in Revier 2 gewechselt.



		Startrevier		
		1	2	3
Zielrevier	1			
	2			
	3			

Verteilung, nach Revieren aufgelistet		
−1	0	1
	5 20 25	

a) Füllen Sie mit Hilfe des Übergangsdiagramms die Übergangstabelle aus:

b) Die Verteilung $\vec{a}_0 = (5; 20; 25)^T$ dieses Jahres sei bekannt. Man nimmt an, dass das Wechselverhalten der Tiere über die Jahre unverändert bleibt. Berechnen Sie die voraussichtlichen Verteilungen $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ für 1, 2 bzw. 3 Jahre später.

c) Stellen Sie die Matrizengleichung auf, die den allgemeinen Zusammenhang zwischen der Verteilung $\vec{a}_n$ des n-ten Jahres und der Verteilung $\vec{a}_{n+1}$ des folgenden Jahres beschreibt. Verwenden Sie für die Übergangsmatrix den Buchstaben A.

d) Berechnen Sie die Verteilung $\vec{a}_{-1}$ des Vorjahres.

e) In vielen Fällen stabilisiert sich die Verteilung im Laufe der Zeit. Angenommen, es gibt eine Verteilung $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)^T$ die sich in den folgenden Jahren **nicht mehr ändert**, obwohl das Wechselverhalten der Tiere ebenfalls unverändert geblieben ist. Beschreiben Sie das Gleichbleiben der Verteilung trotz Wanderungsbewegung durch eine Matrizengleichung mit den Größen A und $\vec{a}$. Beschreiben Sie außerdem das Gleichbleiben des Gesamtbestandes durch eine Gleichung mit den Unbekannten a_1, a_2 und a_3.

f) Aus Teil e) haben Sie 4 Gleichungen für 3 Unbekannte a_1, a_2 und a_3 aufgestellt. Lösen Sie dieses LGS mit dem Gauß-Verfahren und machen Sie die Probe. Ordnen Sie die Reviere nach ihrem Beliebtheitsgrad und vergleichen Sie mit dem Übergangsdiagramm.

6.1. Lösungen zu den Anwendungsaufgaben zur Matrizenrechnung

Aufgabe 1: Ein- und zweistufige Verflechtung
siehe Skript

Aufgabe 2: Einstufige Verflechtung mit Rohstoffkosten

Rohstoff-Endprodukt-Matrix A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, Rohstoffvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ 21 \end{pmatrix}$, Matrizengleichung $\vec{r} = A * \vec{p}$, Gesamtpreis $K_R = \overrightarrow{k_r}^T * \vec{r} = 1140$ €

Aufgabe 3: Einstufige Verflechtung mit gegebenem Lagerbestand und Gewinnberechnung

a) Matrizengleichung $\vec{r} = A * \vec{p}$ mit Rohstoff-Endprodukt-Matrix A = $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 8 & 6 & 10 \\ 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

b) Rohstoffvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 8 & 6 & 10 \\ 8 & 4 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 880 \\ 1600 \\ 1280 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 8 & 54 \\ 8 & 6 & 10 & 84 \\ 8 & 4 & 8 & 68 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 8 & 54 \\ 0 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$ Produktionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) Gesucht ist ein Produktionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ mit ganzzahligen p_1, p_2 und p_3, für die gilt:

(1) $1889p_1 + 5389p_2 + 6889p_3 \leq 52280$
(2) $p_1 + p_2 + p_3 = 20$
(3) p_1, p_2 und $p_3 \geq 0$
Durch Einsetzen von $p_1 = 20 - p_2 - p_3$ in (1) erhält man die Ungleichung
(1)' $3500p_2 + 5000p_3 \leq 14500 \Leftrightarrow 7p_2 + 10p_3 \leq 29$
Durch Ausprobieren (ausgehend von p_3) erhält man nur 3 ganzzahlige Lösungen:

Lösung	p_1	p_2	p_3	Gesamtkosten
1	16	4	0	51780 €
2	17	2	1	49780 €
3	17	1	2	51280 €

Die optimale Ausnutzung des Budgets ist also durch die Bestellung von 16 ME p_1 und 4 ME p_2 gegeben.

Aufgabe 4: Zweistufige Verflechtung mit gegebenem Lagerbestand

a) $\vec{r} = A * \vec{z}$ und $\vec{z} = B * \vec{p}$ bzw. $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

b) Durch Einsetzen erhält man $\vec{r} = A * B * \vec{p} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 225 \\ 105 \end{pmatrix}$

c) Aus der Gleichung $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 14 \end{pmatrix}$ erhält man mit dem Diagonalverfahren $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,6 \end{pmatrix}$, d.h. man kann noch 2 Roboter p_1 und 1 Roboter ME p_2 herstellen. Der entsprechende Bedarf ist jedoch nur $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 11 \end{pmatrix}$, d.h. es bleibt ein Restvektor $\begin{pmatrix} 30 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. Um zu bestimmen, wie viele Steuereinheiten mit diesem Rest noch zusammengebaut werden können, betrachtet man die Gleichung

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. Sie hat die Lösungen $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} z_3 \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} z_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$. Für $z_3 = 1$ erreicht man einen Zwischenproduktvektor $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit ausschließlich ganzzahligen, positiven Elementen. Die Pneumatikzylinder können also vollständig aufgebraucht werden, wenn zusätzlich zu den für die drei Roboter benötigten Steuereinheiten $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ noch je eine Steuereinheit auf Vorrat hergestellt werden. **Probe**: Insgesamt werden $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ Steuereinheiten produziert. Der entsprechende Bedarf $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 14 \end{pmatrix}$ an Pneumatikzylindern entspricht genau dem Lagerbestand.

Aufgabe 5: Einstufige Verflechtung mit Gewinnberechnung

a) Matrizengleichgung: $\vec{r} = A * \vec{p}$ mit Rohstoff-Endprodukt-Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 0 \\ 50 & 5 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 10 & 90 \end{pmatrix}$

b) Rohstoffvektor $\vec{r} = A * \vec{p} = \begin{pmatrix} 44 \\ 285 \\ 1030 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 2 & 0 & 70 \\ 50 & 5 & 10 & 0 & 600 \\ 10 & 20 & 10 & 90 & 200 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 2 & 0 & 70 \\ 10 & 1 & 2 & 0 & 120 \\ 1 & 2 & 1 & 9 & 20 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 2 & 0 & 70 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 20 \\ 0 & 5 & 3 & 45 & 30 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{cccc|c} 17 & 0 & 0 & -72 & 170 \\ 0 & 17 & 0 & -90 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 405 & 170 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{p}_t$ $= \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{17} \begin{pmatrix} 72 \\ 90 \\ -405 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$. Da nur positive Bestellmengen einen Sinn ergeben, bleibt als einzige Lösung $t = 0$, also $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dies entspricht einer Bestellung von je 10 ME der Präparate P_1 und P_3. Werden nur 10 ME P_3 bestellt, können noch 10 ME P_1 für das Lager produziert werden.

d) Der Gesamtwert der Bestellung ergibt sich zu $G = \vec{p}_0^{\,T} * \vec{e}_p = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}^T * \begin{pmatrix} 159{,}95 \\ 34{,}05 \\ 41{,}95 \\ 6{,}95 \end{pmatrix}$ = 2019 €. Die auf Lager produzierten 10 ME P_1 haben einen Wert von $10 \cdot 159{,}95$ € = 1599,50 €.

e) Die für die Produktion von 1 ME P_1 benötigten Rohstoffmengen in ME sind $\vec{r}_1 = A * \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 0 \\ 50 & 5 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 10 & 90 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$. Die für 1 ME P_1 entstehenden Rohstoffkosten sind also $k_{rp1} = \overrightarrow{k_r}^{\mathbf{T}} * \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1,50 \\ 2,50 \\ 0,05 \end{pmatrix}^T * \begin{pmatrix} 5 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} = 133$ €. Die entsprechenden Rohstoffkosten für P_2, P_3 und P_4 erhält man durch Multiplikation, 2., 3., und 4. Spalte von A mit $\overrightarrow{k_r}$. Zusammengefasst ist also $\overrightarrow{k_{rp}}^T = \overrightarrow{k_r}^{\mathbf{T}} * A = (1{,}50;\ 2{,}50;\ 0{,}05) * \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 0 \\ 50 & 5 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 10 & 90 \end{pmatrix} = (133{,}00;\ 21{,}00;\ 28{,}50;\ 4{,}50)$

f) Allgemein ist Gewinn = Ertrag − Kosten. Die Kosten setzen sich aus den Rohstoffkosten und den Fertigungskosten zusammen. Für den Gewinnvektor $\vec{g}$ gilt also $\vec{g} = \overrightarrow{e_p} - \overrightarrow{k_{rp}} - \overrightarrow{k_{fp}} = \begin{pmatrix} 159,95 \\ 34,05 \\ 41,95 \\ 6,95 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 133,00 \\ 21,00 \\ 28,50 \\ 4,50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2,00 \\ 2,00 \\ 1,50 \\ 1,00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24,95 \\ 11,05 \\ 11,95 \\ 1,45 \end{pmatrix}$. Der tatsächlich erzielte Gewinn ergibt sich erst durch Multiplikation der Gewinnspanne pro ME mit dem erzielten Umsatz in ME. Das Präparat P_4 mit der kleinsten Gewinnspanne ist auch das preiswerteste und wird daher vermutlich den größten Umsatz in ME erzielen, während das teuerste Produkt P_1 mit der höchsten Gewinnspanne sicher den kleinsten Umsatz bringt. Die tatsächlichen Gewinne werden daher vermutlich etwas ausgeglichener sein. In der Regel muss man sich entscheiden, ob man **entweder** Massenprodukte mit niedriger Gewinnspanne aber hohen Umsätzen **oder** Luxusprodukte mit hoher Gewinnspanne aber niedrigen Umsatzzahlen herstellen will, da sowohl die Kunden als auch die Mitarbeiter ein möglichst **widerspruchsfreies** und glaubwürdiges **Image** der Firma schätzen.

Aufgabe 6: Übergangsproblem und Markoff-Kette

Allgemein gilt $\vec{a}_{n+1} = A * a_n$ mit $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}_{-1} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 9,5 \\ 17,5 \\ 23 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 9,5 \\ 17,5 \\ 23 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 9,05 \\ 17,7 \\ 23,25 \end{pmatrix}$. Ändert sich die Verteilung $\vec{a}$ nicht mehr, so muss gelten $\vec{a} = A * \vec{a} \Leftrightarrow E * \vec{a} = A * \vec{a} \Leftrightarrow (E - A) * \vec{a} = \vec{0}$. Da der Gesamtbestand gleich bleiben soll, muss außerdem gelten $a_1 + a_2 + a_3 = 50$. Insgesamt erhält man das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,9 & -0,2 & -0,2 & 0 \\ -0,4 & 0,6 & -0,3 & 0 \\ -0,5 & -0,4 & 0,5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 50 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 46 & -35 & 0 \\ 0 & -46 & 35 & 0 \\ 0 & -11 & -11 & 450 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 46 & -35 & 0 \\ 0 & & 891 & 20700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 9,\overline{09} \\ 17,\overline{67} \\ 23,\overline{23} \end{pmatrix}$$