

6.1. Aufgaben zur Matrizenrechnung

Aufgabe 1: Transponieren

Transponiere die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & a & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 0 \\ 8 & -2 \\ t & 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{d}^T = (1 \ 9 \ 9 \ 1)$$

Aufgabe 2: Multiplikation mit einer reellen Zahl

Vereinfache die folgenden Matrizen durch Ausklammern eines reellen Faktors:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,001 & 3 \cdot 10^{-4} & -0,006 \\ 2 \cdot 10^{-3} & 0,003 & 0,024 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x^2 - tx & x \\ xy & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 Multiplikation mit einem Vektor

Überprüfe, welche der Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit welchen der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{g}^T = (3; 4; 2; 0)$$

multipliziert werden können und bilde das Produkt.

Aufgabe 4: Matrizenmultiplikation

Berechne die folgenden Produkte:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	e) $(1 \ 4 \ 0 \ 1) * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	f) $(1 \ 4 \ 0 \ 1) * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	j) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	g) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	k) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	h) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	l) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5: Matrizenmultiplikation

Überprüfe, welche der nachstehenden Matrizen miteinander multipliziert oder addiert werden können und bilde alle möglichen Summen und Produkte:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: Matrizenpotenzen

Berechne das Quadrat A^2 und die dritte Potenz A^3 der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Rechenregeln

Berechne die folgenden Produkte für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$:

- a) $A*B$ b) $B*C$ c) $(A*B)*C$ d) $A*(B*C)$

Aufgabe 8: Rechenregeln

Berechne die folgenden Ausdrücke für die gegebenen Matrizen $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

- a) $B + C$ b) $A*B$ c) $B*C$ d) $A*(B + C)$ e) $A*B + A*C$

Aufgabe 9: Rechenregeln

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Berechne die folgenden Produkte:

- a) $B^T * A^T$ b) $(A*B)^T$ c) $A^T * B^T$ d) $(A+B)^T$ e) $(2*A)^T$ f) $2*B^T$

Aufgabe 10: Satz vom Nullprodukt

Gib mindestens zwei verschiedenen Lösungen B der Gleichung $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} * B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ an.

6.1. Lösungen zu den Aufgaben zur Matrizenrechnung

Aufgabe 1: Transponieren

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ a & 2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 & t \\ 6 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Multiplikation mit einer reellen Zahl

$$A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = 10^{t^4} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 3 & -60 \\ 20 & 30 & 240 \end{pmatrix}, \quad C = x \cdot \begin{pmatrix} x-t & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Multiplikation mit Vektoren

$$A * \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, B * \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, C * \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}, C * \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, C * \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, C * \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, D * \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}, D * \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$D * \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, D * \vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, E * \vec{b} = \vec{b}, E * \vec{d} = \vec{d}, E * \vec{e} = \vec{e}, E * \vec{f} = \vec{f}, F * \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Matrizenmultiplikation

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 2 & 4 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 7 & 15 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & 15 & 1 \end{pmatrix}$ e) 3 f) (3 4)

i) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ k) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5: Matrizenmultiplikation

$$A * B = \begin{pmatrix} -9 & 12 & 0 \\ 17 & -24 & 2 \\ -13 & 20 & -4 \end{pmatrix}, \quad A * C = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ -17 & -39 \\ 20 & 36 \end{pmatrix}, \quad A * G = \begin{pmatrix} 12 & 9 & -15 & 6 \\ -24 & -17 & 27 & -14 \\ 20 & 13 & -19 & 14 \end{pmatrix}, \quad B * A = \begin{pmatrix} -33 & -4 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}, \quad C * B =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -12 \\ -12 & 20 & -6 \end{pmatrix}, \quad C * G = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 & 16 \\ 20 & 12 & -16 & 16 \end{pmatrix}, \quad D * E = D, \quad D * f = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad E * D = D, \quad E * f = f, \quad G * D = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -8 & 8 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G * E = G, \quad G * f = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D + E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: Matrizenpotenzen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad D^2 = \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad D^3 = \begin{pmatrix} 54 & -11 \\ 22 & -23 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Rechenregeln (Assoziativgesetz)

$$\text{a) } A*B = \begin{pmatrix} -8 & 18 & 10 & 2 \\ 2 & 7 & -3 & 1 \\ -11 & -4 & 15 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B*C = \begin{pmatrix} 35 & -19 & 8 \\ 11 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) und d) } (A*B)*C = A*(B*C) = \begin{pmatrix} 114 & -30 & 20 \\ 35 & -19 & 8 \\ -2 & 25 & -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8: Rechenregeln (Distributivgesetz)

$$\text{a) } B + C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A*B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 16 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{c) } B*C = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 3 \\ 9 & -12 \end{pmatrix} \quad \text{d) } A*(B + C) = A*B + A*C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 17 & 11 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9: Rechenregeln (Kommutativgesetz)

$$\text{a) } B^T * A^T = \begin{pmatrix} -7 & -15 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{b) } (A*B)^T = \begin{pmatrix} -7 & -15 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A^T * B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } (A+B)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e) } (2*A)^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{f) } 2*B^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10: Satz vom Nullprodukt

$$\text{z. B. } B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$