6.1. Prüfungsaufgaben zur Matrizenrechnung

Aufgabe 1: Anwendung der Matrizenrechnung (4)
Sie haben 3 kg Äpfel, 0,8 kg Tomaten und 5 kg Kartoffeln gekauft. Die Kilopreise sind 2,99 € für die Äpfel, 1,99 € für die Tomaten und 1,05 € für die Kartoffeln. Wie hoch ist dann die gesamte Kaufsumme? Für die Berechnung der gesamten Kaufsumme müssen reelle Zahlen multipliziert und addiert werden. Formulieren Sie die Rechnung in Matrizen- (bzw. Vektor-)schreibweise.

Lösung:

Gesamtpreis = $\begin{pmatrix} 3 & 0{,}8 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2{,}99\ € \\ 1{,}99\ € \\ 1{,}05\ € \end{pmatrix}$ = 15,81 €.

Aufgabe 2: Anwendungs der Matrizenrechnung (4)
Die Bestellliste eines Cateringunternehmens für diese Woche liegt in Tabellenform vor:

Äpfel	Kartoffeln	Tomaten
400kg	500kg	80kg

Die Liste der Kilopreise hat folgenden Gestalt:

Äpfel	1,50 €
Kartoffeln	0,80 €
Tomaten	1,10 €

Wie hoch ist die Gesamtrechnung?
Für die Berechnung der gesamten Kaufsumme müssen reelle Zahlen multipliziert und addiert werden. Formulieren Sie die Rechnung mit Hilfe von Vektoren.

Lösung:

Gesamtpreis = $\begin{pmatrix} 400 & 500 & 80 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1{,}50\ € \\ 0{,}80\ € \\ 1{,}10\ € \end{pmatrix}$ = 1088 €.

Aufgabe 3: Matrizengleichung mit Parameter

Für jedes t ϵ R sind die Matrix A_t und der Vektor b gegeben durch $A_t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & t+4 \\ 2t & t-1 & 2t-7 \\ 5 & 1 & -t \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie den Term $f(t) = b^T * A_t * b$ für $t = -1$
b) Lösen Sie die Matrizengleichung $(X^T * A_3)^T - E = A_0 + 2 \cdot X$ nach X auf.
c) Berechnen Sie $X = (A_3^T - 2 \cdot E)^{-1} * (A_0 + E)$ (Zwischenergebnis: $(A_3^T - 2 \cdot E)^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 25 & 6 \\ 2 & -20 & -2 \\ 1 & 39 & 6 \end{pmatrix}$)

Lösung

a) $f(-1) = b^T * A_{-1} * b = (3\ \ -2\ \ 3) * \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & -9 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = (16\ \ 4\ \ 30) * \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 130.$

b) $X = (A_3^T - 2 \cdot E)^{-1} * (A_0 + E)$

c) $A_3^T - 2E = \begin{pmatrix}-1&6&5\\-1&2&1\\7&-1&-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&6&5\\-1&0&1\\7&-1&-5\end{pmatrix}$. Invertierung: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}-3&6&5&1&0&0\\-1&0&1&0&1&0\\7&-1&-5&0&0&1\end{array}\right) \cong$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-3&6&5&1&0&0\\0&6&2&1&-3&0\\0&39&20&7&0&3\end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc}-3&6&5&1&0&0\\0&6&2&1&-3&0\\0&0&42&3&117&18\end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc}-3&6&5&1&0&0\\0&6&2&1&-3&0\\0&0&14&1&39&6\end{array}\right) \cong$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}42&-84&0&-9&195&30\\0&-42&0&-6&60&6\\0&0&14&1&39&6\end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc}14&-28&0&-3&65&10\\0&-14&0&-2&20&2\\0&0&14&1&39&6\end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc}14&0&0&1&25&6\\0&-14&0&-2&20&2\\0&0&14&1&39&6\end{array}\right) \Rightarrow (A_3^T$

$2 \cdot E)^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1&25&6\\2&-20&-2\\1&39&6\end{pmatrix}$. $A_0 + E = \begin{pmatrix}-1&-1&4\\0&-1&-7\\5&1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1&4\\0&0&-7\\5&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow X = (A_3^T$

$-2 \cdot E)^{-1} * (A_0 + E) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1&25&6\\2&-20&-2\\1&39&6\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0&-1&4\\0&0&-7\\5&1&1\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}30&5&-165\\-10&-4&146\\30&5&-263\end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Matrizengleichung mit Parameter

Für jedes t ϵ R sind die Matrix A_t und der Vektor b gegeben durch $A_t = \begin{pmatrix}-1&-1&t+4\\2t&t-1&2t-7\\5&1&-t\end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie den Term $f(t) = b^T * A_t * b$ für t = 1

b) Lösen Sie die Matrizengleichung $A_0 * X^{-1} + X^{-1} = A_3 - 2 \cdot E$ nach X auf.

c) Berechnen Sie $X = (A_3 - 2 \cdot E)^{-1} * (A_0 + E)$. (Zwischenergebnis: $(A_3 - 2 \cdot E)^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1&2&1\\25&-20&39\\6&-2&6\end{pmatrix}$)

Lösung

a) $f(1) = b^T * A_1 * b = (3\ \ {-2}\ \ 3) * \begin{pmatrix}-1&-1&5\\2&0&-5\\5&1&-1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix} = (8\ \ 0\ \ 22) * \begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix} = 90.$

b) $X = (A_3 - 2 \cdot E)^{-1} * (A_0 + E)$

c) $A_3 - 2E = \begin{pmatrix}-1&-1&7\\6&2&-1\\5&1&-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&-1&7\\6&0&-1\\5&1&-5\end{pmatrix}$. Invertierung: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}-3&-1&7&1&0&0\\6&0&-1&0&1&0\\5&1&-5&0&0&1\end{array}\right) \cong$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-3&-1&7&1&0&0\\0&-2&13&2&1&0\\0&-2&20&5&0&3\end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc}-3&-1&7&1&0&0\\0&-2&13&2&1&0\\0&0&7&3&-1&3\end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc}-3&-1&0&-2&1&-3\\0&-14&0&-25&20&-39\\0&0&7&3&-1&3\end{array}\right) \cong$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}42&0&0&3&6&3\\0&-14&0&-25&20&-39\\0&0&7&3&-1&3\end{array}\right) \Rightarrow (A_3 - 2 \cdot E)^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1&2&1\\25&-20&39\\6&-2&6\end{pmatrix}$. $A_0 + E = \begin{pmatrix}-1&-1&4\\0&-1&-7\\5&1&0\end{pmatrix} +$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1&4\\0&0&-7\\5&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow X = (A_3 - 2 \cdot E)^{-1} * (A_0 + E) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1&2&1\\25&-20&39\\6&-2&6\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0&-1&4\\0&0&-7\\5&1&1\end{pmatrix} =$

$\frac{1}{14}\begin{pmatrix}5&0&-9\\195&14&279\\30&0&44\end{pmatrix}$

Aufgabe 5: Matrizengleichung mit Parameter

Für jedes t ϵ R sind die Matrix A_t und der Vektor b_t gegeben durch: $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t+1 & 0 \\ t & t^2 & -1 \\ 2 & t & -t \end{pmatrix}$ und $b_t = \begin{pmatrix} 3 \\ t-1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie den Term $f(t) = b_t^T * A_t * b_t$ für t = 1

b) Lösen Sie die Matrizengleichung $(X^T * A_1)^T + E = A_0 - X$ nach X auf.

c) Berechnen Sie $X = (A_1^T + E)^{-1} * (A_0 - E)$ (Zwischenergebnis: $(A_1^T + E)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$)

Lösung

a) $f(1) = b_1^T * A_1 * b_1 = (3\ \ 0\ \ 2) * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (7\ \ 8\ \ -2) * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 17.$

b) $X = (A_1^T + E)^{-1} * (A_0 - E)$

c) $A_1^T + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Invertierung: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow (A_1^T E)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. $A_0 - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = (A_1^T + E)^{-1} * (A_0 - E) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -5 \\ -4 & 0 & 2 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6: Matrizengleichung mit Parameter

Für jedes t ϵ R sind die Matrix A_t und der Vektor b_t gegeben durch $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t+1 & 0 \\ t & t^2 & -1 \\ 2 & t & -t \end{pmatrix}$ und $b_t = \begin{pmatrix} 3 \\ t-1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie den Term $f(t) = b_t^T * A_t * b_t$ für t = 2

b) Lösen Sie die Matrizengleichung $A_0 * X^{-1} - E = A_1 + X^{-1}$ nach X auf.

c) Berechnen Sie $X = (A_1 + E)^{-1} * (A_0 - E)$ (Zwischenergebnis: $(A_1 + E)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$)

Lösung

a) $f(2) = b_2^T * A_2 * b_2 = (3\ \ 1\ \ 2) * \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (9\ \ 17\ \ -5) * \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 34.$

b) $X = (A_1 + E)^{-1} * (A_0 - E)$

c) $A_1 + E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Invertierung: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & -2 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & -2 \end{array}\right) \cong$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow (A_1\ E)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}. \ A_0 - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = (A_1 + E)^{-1} * (A_0 - E) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Matrizengleichung mit Parameter

Gegeben sind die Matrix A_t und die Vektoren b_t und c durch $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t+1 & 0 \\ t & t^2 & -1 \\ 2 & t & -1 \end{pmatrix}$, $b_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t-2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

mit t ∈ 3

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $A_t * x = b_t$ für die folgenden Fälle: (11)
   $t = -1$
   $t = 0$
   $t = 2$

b) Gegeben ist die Funktion f durch $f(t) = c^T * A_t^T * c$ mit t ∈ 3. Bestimmen Sie das Minimum der Funktion f. Für welche Werte von t gilt $f(t) > 0$? (7)

c) Zeigen Sie durch Umformen der Matrizengleichung $X * A_1 = (X^{-1} - E) * X$, dass $X = (A_1 + E)^{-1}$ und berechnen Sie X. (7)

Lösung

a) $t = -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow L = \{\ \}$; $t = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow L = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$; $t = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow L = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : u \in R\right\}$

b) $f(t) = c^T * A_t^T * c = (3; -1; 2) * \begin{pmatrix} 1 & t+1 & 0 \\ t & t^2 & -1 \\ 2 & t & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = t^2 - 12t + 20 \Rightarrow f'(t) = 2t - 12$ und $f''(t) = 2 \Rightarrow$ relatives Minimum ($f'(t) = 0$ und $f''(t) > 0$) bei $t = 6$. Da es sich um den Scheitelpunkt einer nach oben geöffneten Parabel handelt, befindet sich bei $t = 6$ auch das absolute Minimum für Intervalle, die $t = 6$ enthalten. $f(t) < 0$: die nach oben geöffnete Parabel liegt zwischen ihren Nullstellen $x_{1/2} = 6 \pm 4$ echt unterhalb der x–Achse, also $f(t) < 0$ für $2 < x < 10$.

c) Lösung der Matrizengleichung:

$$X * A_1 = (X^{-1} - E) * X$$
$$X * A_1 = E - X$$
$$X * (A_1 + E) = E$$
$$X = (A_1 + E)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8: Matrizengleichung mit Parameter und Extremwertaufgabe

Für jedes $t \in R$ sind die Matrix A_t und die Vektoren b_t und c_t gegeben durch $A_t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & t+4 \\ 2t & t-1 & 2t-7 \\ 5 & 1 & -t \end{pmatrix}$, $b_t = \begin{pmatrix} t+3 \\ -2 \\ t-3 \end{pmatrix}$ und $c_t = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $A_1 * x = b_1$.(5)

b) Berechnen Sie $(A_3 - 2E)^{-1} * (A_0 + E)$. (10)

c) Lösen Sie die Matrizengleichung $(X^T * A_3^T)^T - X = A_0 + X + E$ nach X auf. (5)

d) Berechnen Sie den Term $f(t) = b_t^T * c_t$. Für welchen Wert von t nimmt f(t) ein relatives Minimum an? (6)

Lösung

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & -5 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & 24 & 18 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & 14 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{array}\right) \cong$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -14 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 14 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -27 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $(A_3 - 2E) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 7 \\ 6 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$; Invertierung: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -1 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -1 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 13 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 20 & 5 & 0 & 3 \end{array}\right) \cong$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -1 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -13 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 14 & 0 & 25 & -20 & 39 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} -42 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 14 & 0 & 25 & -20 & 39 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$\Rightarrow (A_3 - 2E)^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 25 & -20 & 39 \\ 6 & -2 & 6 \end{pmatrix}$; Einsetzen: $(A_3 - 2E)^{-1} * (A_0 + E) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 25 & -20 & 39 \\ 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} *$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -9 \\ 195 & 14 & 279 \\ 30 & 0 & 44 \end{pmatrix}$.

c)

$(X^T * A_3^T)^T - X$	$=$	$A_0 + X + E$	T
$A_3 * X - X$	$=$	$A_0 + X + E$	$-X$
$A_3 * X - 2X$	$=$	$A_0 + E$	Erweitern mit E
$A_3 * X - 2E * X$	$=$	$A_0 + E$	Ausklammern von X
$(A_3 - 2E) * X$	$=$	$A_0 + E$	$* (A_3 - 2E)^{-1}$ von links
X	$=$	$(A_3 - 2E)^{-1} * (A_0 + E)$.	

d) $f(t) = b_t^T * c_t = \begin{pmatrix} t+3 & -2 & t-3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = t^2 + 4t - 5 \Rightarrow f'(t) = 2t + 4$ und $f''(t) = 2 \Rightarrow$ Minimum ($f'(t) = 0$ und $f''(t) > 0$) im Punkt $T(-2 \mid -9)$.

Aufgabe 9: Matrizengleichung mit Parameter und Extremwertaufgabe

Für jedes t ϵ R sind die Matrix A_t und die Vektoren b_t und c_t gegeben durch $A_t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & t+4 \\ 2t & t-1 & 2t-7 \\ 5 & 1 & -t \end{pmatrix}$, $b_t = \begin{pmatrix} t+3 \\ -2 \\ t-3 \end{pmatrix}$ und $c_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $A_{-2} * x = b_{-2}$. (5)

b) Berechnen Sie $(A_3 - 2E)^{-1} * (E - A_1)$. (10)

c) Lösen Sie die Matrizengleichung $(X^T * A_3^T)^T - X = X - A_1 + E$ nach X auf. (5)

d) Berechnen Sie den Term $f(t) = b_t^T * c_t$. Für welchen Wert von t nimmt f(t) ein relatives Minimum an? (6)

Lösung

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -11 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -19 & -6 \\ 0 & -4 & 12 & 0 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -19 & -6 \\ 0 & 0 & -64 & -24 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \end{array}\right) \cong$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 8 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $(A_3 - 2E) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 7 \\ 6 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$; Invertierung: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -1 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -1 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 13 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 20 & 5 & 0 & 3 \end{array}\right) \cong$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -1 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -13 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 14 & 0 & 25 & -20 & 39 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} -42 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 14 & 0 & 25 & -20 & 39 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$\Rightarrow (A_3 - 2E)^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 25 & -20 & 39 \\ 6 & -2 & 6 \end{pmatrix}$; Einsetzen: $(A_3 - 2E)^{-1} * (E - A_1) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 25 & -20 & 39 \\ 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} *$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 5 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -7 & 2 & 7 \\ 125 & -34 & -147 \\ -14 & -2 & -28 \end{pmatrix}$.

c)

$(X^T * A_3^T)^T - X$	$=$	$X - A_1 + E$	T
$A_3 * X - X$	$=$	$X - A_1 + E$	$-X$
$A_3 * X - 2X$	$=$	$-A_1 + E$	Erweitern mit E
$A_3 * X - 2E * X$	$=$	$-A_1 + E$	Ausklammern von X
$(A_3 - 2E) * X$	$=$	$-A_1 + E$	$* (A_3 - 2E)^{-1}$ von links
X	$=$	$(A_3 - 2E)^{-1} * (-A_1 + E)$.	

d) $f(t) = b_t^T * c_t = \begin{pmatrix} t+3 & -2 & t-3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = t^2 - 2t + 1 \Rightarrow f'(t) = 2t - 2$ und $f''(t) = 2 \Rightarrow$ Minimum ($f'(t) = 0$ und $f''(t) > 0$) im Punkt $T(1 | 0)$.