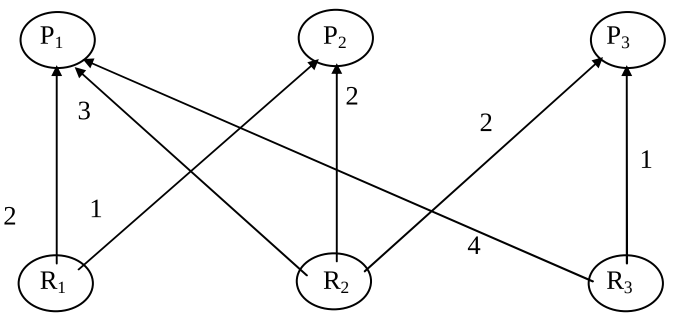
6.1. Prüfungsaufgaben zu Verflechtungsproblemen

Aufgabe 1: Einstufige Verflechtung mit Gewinnberechnung (7)
Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Endprodukte P_1, P_2 und P_3 her. In dem folgenden Diagramm lässt sich ablesen, wie viele Mengeneinheiten (ME) der drei Rohstoffe jeweils für die Herstellung von 1 ME der Endprodukte benötigt werden:



Die Preise für die drei Rohstoffe in € pro ME sind gegeben durch $\overrightarrow{k_R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Verkaufspreise für die drei Endprodukte in € je ME sind gegeben durch $\overrightarrow{v_P} = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$.

a) Für einen Auftrag sind je 100 ME von P_1, P_2, und P_3 zu liefern. Berechnen Sie
   - den Gesamterlös in €
   - die benötigten Rohstoffmengen in ME
   - die Rohstoffkosten in €
   - den Rohgewinn in € für diesen Auftrag. (5)

b) Für einen weiteren Auftrag werden von R_1 390 ME, von R_2 1020 ME und von R_3 660 ME verarbeitet. Wieviele ME von P_1, P_2 und P_3 werden damit gefertigt? (2)

Lösung

a) Gesamterlös $E = \overrightarrow{v_P} * \vec{p} = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = 21000$ € (1)

Rohstoffvektor $\vec{r} = A * \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 700 \\ 500 \end{pmatrix}$ (2)

Rohstoffkosten $K = \overrightarrow{k_R} * \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 300 \\ 700 \\ 500 \end{pmatrix} = 3200$ € (1)

Rohgewinn $G = E - K = 17800$ €. (1)

b) $\vec{p} = A^{-1} * \vec{r} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 390 \\ 1020 \\ 660 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1080 \\ 1350 \\ 1620 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 180 \end{pmatrix}$.

Inversenberechnung:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \cong$$

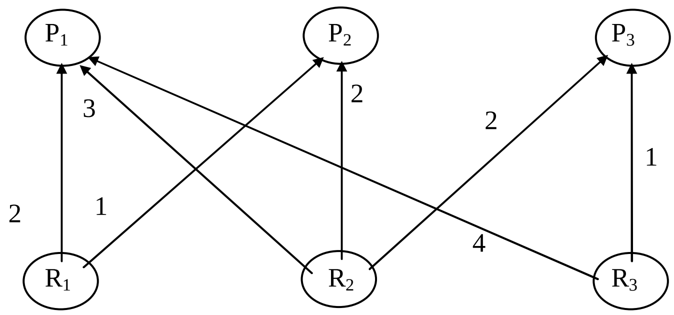
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 18 & 0 & 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & -9 & 0 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternative: Lösung von $\vec{r} = A * \vec{p}$ mit Gauß-Verfahren bestimmen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 390 \\ 3 & 2 & 2 & 1020 \\ 4 & 0 & 1 & 660 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 390 \\ 0 & -1 & -4 & -870 \\ 0 & -2 & 1 & -120 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 390 \\ 0 & -1 & -4 & -870 \\ 0 & 0 & 9 & 1620 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 390 \\ 0 & -1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & 1 & 180 \end{array}\right) \cong$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 240 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 180 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 180 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Aufgabe 2: Einstufige Verflechtung mit Gewinnberechnung (7)
Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Endprodukte P_1, P_2 und P_3 her. In dem folgenden Gozintographen lässt sich ablesen, wie viel Mengeneinheiten (ME) der drei Rohstoffe jeweils für die Herstellung von 1 ME der Endprodukte benötigt werden:



Die Preise für die drei Rohstoffe in € pro ME sind gegeben durch $\overrightarrow{k_R} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Verkaufspreise für die drei Endprodukte in DM je ME sind gegeben durch $\overrightarrow{v_P} = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 25 \end{pmatrix}$.

a) Für einen Auftrag sind je 50 ME von P_1, P_2, und P_3 zu liefern. Berechnen Sie
   - den Gesamterlös in €
   - die benötigten Rohstoffmengen in ME
   - die Rohstoffkosten in €
   - den Rohgewinn in € für diesen Auftrag. (5)

b) Für einen weiteren Auftrag werden von R_1 195 ME, von R_2 510 ME und von R_3 330 ME verarbeitet. Wie viele ME von P_1, P_2 und P_3 werden damit gefertigt? (2)

Lösung

a) Gesamterlös $E = \overrightarrow{v_P} * \vec{p} = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 25 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix} = 5250$ € (1)

Rohstoffvektor $\vec{r} = A * \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 350 \\ 250 \end{pmatrix}$ (2)

Rohstoffkosten $K = \overrightarrow{k_R} * \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 150 \\ 350 \\ 250 \end{pmatrix} = 1400$ € (1)

Rohgewinn G = E − K = 3850 €. (1)

b) $\vec{p} = A^{-1} * \vec{r} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 195 \\ 510 \\ 330 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 540 \\ 675 \\ 810 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 75 \\ 90 \end{pmatrix}$.

Inversenberechnung:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \cong$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 18 & 0 & 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & -9 & 0 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternative: Lösung von $\vec{r} = A * \vec{p}$ mit Gauß-Verfahren bestimmen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 195 \\ 3 & 2 & 2 & 510 \\ 4 & 0 & 1 & 330 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 195 \\ 0 & -1 & -4 & -435 \\ 0 & -2 & 1 & -60 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 195 \\ 0 & -1 & -4 & -435 \\ 0 & 0 & 9 & 810 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 195 \\ 0 & -1 & 0 & -75 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right) \cong$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} 60 \\ 75 \\ 90 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Aufgabe 3: Zweistufige Verflechtung mit Gewinnberechnung (12)

In einem Betrieb werden aus den Einzelteilen T_1 und T_2 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und aus diesen die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt. Die Produktionszahlen sind jeweilig ganzzahlig. Die folgenden Tabellen geben an, wie viele Einzelteile für je ein Zwischenprodukt und wie viele Zwischenprodukte je Endprodukt verarbeitet werden.

	Z_1	Z_2
T_1	2	3
T_2	4	1

	E_1	E_2	E_3
Z_1	1	2	3
Z_2	3	4	2

a) Es sollen 30 Endprodukte E_1, 40 Endprodukte E_2 und 20 Endprodukte E_3 hergestellt werden. Wieviele Einzelteile T_1 und T_2 werden dazu benötigt? (3)

b) An variablen Kosten in € entstehen:

- die Kosten je Einzelteil $\overrightarrow{k_T} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,
- die Fertigungskosten je Zwischenprodukt $\overrightarrow{k_Z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$,
- die Fertigungskosten je Endprodukt $\overrightarrow{k_E} = \begin{pmatrix} 19 \\ 26 \\ 15 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die gesamten Herstellungskosten $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$ bezogen auf je ein Endprodukt. (3)

c) Geben Sie die Herstellungskosten für den Auftrag aus Teil a) an. (1)

d) Wie viele Endprodukte können aus 10 Zwischenprodukten Z_1 und 19 Zwischenprodukten Z_2 hergestellt werden? (5)

Lösung

a) Gegeben sind die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, die Einzelteil-Zwischenprodukt-Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ und der Produktionsvektor der Endprodukte $\vec{p} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}$. Die Einzelteil-Endprodukt-Matrix ist dann $C = A * B = \begin{pmatrix} 11 & 16 & 12 \\ 7 & 12 & 14 \end{pmatrix}$. Der Vektor der benötigten Einzelteile ist dann $\vec{r} = C * \vec{p} = \begin{pmatrix} 1210 \\ 970 \end{pmatrix}$ (3)

b) Die Herstellungskosten der Zwischenprodukte je Endprodukt betragen $\overrightarrow{k_Z}\,T * B = (14; 22; 21)T$ (1)

Die Herstellungskosten der Einzelteile je Endprodukt betragen $\overrightarrow{k_T}\,T * C = (47; 72; 64)T$ (1)

Die je gesamten Kosten je Endprodukt betragen $\vec{k}\,T = \overrightarrow{k_E}\,T + \overrightarrow{k_Z}\,T * B + \overrightarrow{k_T}\,T * C = (80; 120; 100)$. (1)

c) Die Kosten für den Auftrag aus a) sind $K = \vec{k}^{\,T} * \vec{p} = 9200$ € (1)

d) Mit dem Zwischenproduktvektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \end{pmatrix}$ gilt $B * \vec{p} = \vec{z} \triangleq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 3 & 4 & 2 & 19 \end{array}\right) \triangleq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 7 & 11 \end{array}\right)$. (2)

Man erhält z.B.

$p_1 = 4t - 1 \quad \geq 0 \;\Rightarrow\; t \geq \frac{1}{4}$ (1)

$p_2 = \frac{11-7t}{2} \quad \geq 0 \;\Rightarrow\; t \leq \frac{11}{7}$ (1)

$p_3 = t \quad \geq 0 \;\Rightarrow\; t \geq 0$

Mit der Zusatzbedingung, dass p_2 **ganzzahlig** sein soll, erhält man t = 1 und damit $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1)

Aufgabe 4: Zweistufige Verflechtung mit Gewinnberechnung (12)

In einem Betrieb werden aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und aus diesen die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt.

Die folgenden Tabellen geben an, wie viele Mengeneinheiten der einzelnen Rohstoffe bzw. der einzelnen Zwischenprodukte zu je einer Mengeneinheit eines Endproduktes benötigt werden.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	3	4
R_2	5	3	6
R_3	4	7	1

	E_1	E_2	E_3
Z_1	1	0	3
Z_2	2	1	4
Z_3	3	2	0

a) Berechnen Sie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C. (1)

b) Wie viele Endprodukte lassen sich aus 700 ME von Z_1, 1300 ME von Z_2 und 900 ME von Z_3 herstellen? (2)

c) Ein Kunde erteilt einen Auftrag über 150 ME von E_1, 200 ME von E_2 und 130 ME von E_3. Im Zwischenproduktlager stehen schon 120 ME von Z_1, 500 ME von Z_2 und 440 ME von Z_3 für die Weiterverarbeitung bereit. Wie viele ME der einzelnen Zwischenprodukte und wieviel ME der einzelnen Rohstoffe werden zusätzlich benötigt, um den Auftrag erfüllen zu können? (3)

d) Die folgenden Vektoren geben die Kosten der einzelnen Produktionsschritt in €/ME an:

Beim Ankauf von je 1 ME Rohstoffen: $\overrightarrow{k_r}^{\,T} = (4; 3; 5)$

Bei der Fertigung von je 1 ME Zwischenprodukt aus den Rohstoffen: $\overrightarrow{k_z}^{\,T} = (3; 5; 2)$

Bei der Fertigung von je 1 ME Endprodukt aus den Zwischenprodukten: $\overrightarrow{k_E}^{\,T} = (11; 13; 9)$

Berechnen Sie die gesamten Herstellungskosten je ME der Endprodukte. (4)

Kontrollergebnis: $\vec{k}^{\,T} = (302; 156; 391)$ in €/ME

e) Die Verkaufspreise der Endprodukte in €/ME sind $\vec{e}^{\,T} = (410; 220; 450)$. Berechnen Sie den Gewinn für den Auftrag aus c). (2)

Lösung

a) Gegeben sind die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Die Rohstoff-Endprodukt-Matrix ist dann $C = A * B = \begin{pmatrix} 20 & 11 & 18 \\ 29 & 15 & 27 \\ 21 & 9 & 40 \end{pmatrix}$. (1)

b) Gegeben ist der Zwischenproduktvektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} 700 \\ 1300 \\ 900 \end{pmatrix}$. Aus der Gleichung $B * \vec{p} = \vec{z}$ ergibt sich mit dem Gauß-Verfahren (GTR) der Produktionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$ (2)

c) Gegeben ist der Produktionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 130 \end{pmatrix}$. Für diesen werden insgesamt $\vec{z}_g = B * \vec{p} = \begin{pmatrix} 540 \\ 1020 \\ 850 \end{pmatrix}$ Zwischenprodukte benötigt, von denen schon $\vec{z}_L = \begin{pmatrix} 120 \\ 500 \\ 440 \end{pmatrix}$ im Lager vorhanden sind. Es müssen also noch $\vec{z} = \vec{z}_g - \vec{z}_L = \begin{pmatrix} 420 \\ 520 \\ 410 \end{pmatrix}$ Zwischenprodukte hergestellt werden. Dafür werden $\vec{r} = A * \vec{z} = \begin{pmatrix} 4040 \\ 6120 \\ 5730 \end{pmatrix}$ Rohstoffe benötigt. (3)

d) Die gesamten Herstellungskosten sind $\vec{k}^T = \overrightarrow{k_R}^T * C + \overrightarrow{k_Z}^T * B + \overrightarrow{k_E}^T = (272; 134; 353) + (19; 9; 29) + (11; 13; 9) = (302; 156; 391)$ (4)

e) Gewinn = Erlös − Kosten = $\vec{e}^T * \vec{p} - \vec{k}^T * \vec{p} = 164000$ € − 127330 € = 36670 € (2)