

6.2. Aufgaben zur Lösbarkeit von LGS

Aufgabe 1: Lösbarkeit von LGS

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden **inhomogenen** linearen Gleichungssysteme unter Verwendung des **Diagonalverfahrens**. Gib anschließend die Lösungsmenge des zugehörigen **homogenen** Systems an.

Teil	Ausgangsform	Dreiecksform	Diagonalform	$L_{inh} =$	$L_{hom} =$
a)	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & & 5 \\ 3 & 0 & 2 & & 5 \\ -1 & 2 & -3 & & -4 \end{pmatrix}$				
b)	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & & 1 \\ -3 & -2 & 2 & & -1 \\ 5 & -3 & 1 & & 8 \end{pmatrix}$				
c)	$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & & 3 \\ 0 & 0 & -1 & & -3 \\ 3 & 2 & 5 & & 22 \end{pmatrix}$				
d)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & & 1 \\ 3 & 5 & -5 & & 2 \\ -2 & -4 & 3 & & -3 \end{pmatrix}$				
e)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & & 1 \\ 3 & 6 & -5 & & 2 \\ -2 & -4 & 3 & & -3 \end{pmatrix}$				
f)	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & & 5 \\ -4 & 2 & 1 & & -5 \\ 6 & -3 & 2 & & 16 \end{pmatrix}$				
g)	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & 3 \\ -4 & 2 & -6 & & -2 \end{pmatrix}$				
h)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & & 1 \\ 3 & 6 & -6 & & 3 \\ -2 & -4 & 3 & & -3 \end{pmatrix}$				
i)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & & 1 \\ 3 & 5 & -5 & & 2 \\ -2 & -3 & 3 & & -1 \end{pmatrix}$				
j)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & & 1 \\ 3 & 5 & -4 & & 2 \\ -2 & -3 & 2 & & -1 \end{pmatrix}$				
k)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & & 1 \\ 3 & 6 & -6 & & 3 \\ -2 & -4 & 4 & & -2 \end{pmatrix}$				
l)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & 10 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & & 11 \\ -2 & 6 & 4 & 10 & & 18 \end{pmatrix}$				

Aufgabe 2: Rang einer Matrix

Bestimme den Rang der folgenden Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 4 \\ 1 & -12 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 14 & 9 \\ 5 & -8 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 16 \\ 6 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: Rangkriterium

Bestimme in Aufgabe 1 für alle LGS

- den Rang der Koeffizientenmatrix $\text{Rg}(A)$
 - den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $\text{Rg}(A|\vec{b})$ für den inhomogenen und den homogenen Fall
 - die Zahl n der Unbekannten.
- a) Wie hängt das Verhältnis zwischen $\text{Rg}(A)$ und $\text{Rg}(A|\vec{b})$ mit der Existenz von Lösungen zusammen?
- b) Wie hängt das Verhältnis zwischen $\text{Rg}(A|\vec{b})$ und n mit der Zahl der Lösungen zusammen?

Aufgabe 4: Lösbarkeit von LGS mit ParameternFür welche Werte von t hat die Gleichung $A_t \cdot \vec{x} = \vec{b}_t$ keine, eine oder unendlich viele Lösungen?

a) $A_t = \begin{pmatrix} t & 2 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix}$

e) $A_t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & t \\ 4+2t & 2t+2 & 3 \\ 8 & 8-t & 3t-3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t+3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $A_t = \begin{pmatrix} t & 2t-1 & t-1 \\ 0 & t+2 & t+1 \\ 0 & 0 & t^2-4t+3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} 5 \\ 2t-1 \\ t-3 \end{pmatrix}$

f) $A_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & t & -8 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & t \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} -1 \\ -20 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

g) $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & t & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -t+2 & 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} t+8 \\ 5t+5 \\ 3t \\ -t+14 \end{pmatrix}$

d) $A_t = \begin{pmatrix} 2 & t+2 & 2 \\ -3 & 1 & t-1 \\ t & -1 & -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

h) $A_t = \begin{pmatrix} 2 & t & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & t \\ 2 & t & t \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

6.2. Lösungen zu den Aufgaben zur Lösbarkeit von LGS

Aufgabe 1: Lösbarkeit von LGS

Teil	Ausgangsform	Dreiecksform	Diagonalform	$L_{inh} =$	$L_{hom} =$
a)	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
b)	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 42 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
c)	$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 & 22 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 14 & 23 & 97 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
d)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -5 & 2 \\ -2 & -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
e)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 2 \\ -2 & -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$	$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$
f)	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & -5 \\ 6 & -3 & 2 & 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$	$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$
g)	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1,4 \\ 0,2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}$	$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1,4 \\ 0,2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$
h)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -6 & 3 \\ -2 & -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}$	$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$
i)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -5 & 2 \\ -2 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}$	$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$
j)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -4 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}$	$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$
k)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -6 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R}$	$\left\{ s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$
l)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 11 \\ -2 & 6 & 4 & 10 & 18 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 9 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 7 & 0 & 14 \\ 0 & 5 & 5 & 9 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R}$	$\left\{ s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 2: Rang einer Matrix

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}(A) = 2$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}(A) = 1$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}(A) = 3$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 4 \\ 1 & -12 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}(A) = 4$$

$$\text{e) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 14 & 9 \\ 5 & -8 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}(A) = 3$$

$$\text{f) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 16 \\ 6 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}(A) = 2$$

Aufgabe 3: Rangkriterium

siehe Skript

Aufgabe 4: Lösbarkeit von LGS mit Parametern

$$\text{a) } \begin{pmatrix} t & 2 & | & t-1 \\ 0 & t-1 & | & t \end{pmatrix}$$

$$\text{- eindeutige Lösbarkeit für } t \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}: \quad L = \left\{ \frac{1}{t(t-1)} \begin{pmatrix} t^2 - 4t + 1 \\ t^2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{- keine Lösung für } t \in \{0;1\}: \quad L = \{\}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} t & 2t-1 & t-1 & | & 5 \\ 0 & t+2 & t+1 & | & 2t-1 \\ 0 & 0 & (t-3)(t-1) & | & t-3 \end{pmatrix}$$

$$\text{- genau eine Lösung für } t \in \mathbb{R} \setminus \{-2;0;1;3\}: \quad L = \left\{ \frac{1}{t(t+2)(t-1)} \begin{pmatrix} 14t-12 \\ 2t^2(t-2) \\ t(t+2) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{- unendlich viele Lösungen für } t = 3: \quad L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 \\ -12 \\ 15 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{- keine Lösung für } t \in \{-2;0;1\}: \quad L = \{\}$$

c)

$$\begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 & | & -6 \\ 1 & t & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & t+1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 2 \\ \cdot (-2) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & t+1 & | & 1 \\ t-1 & 0 & 0 & | & -6 \end{pmatrix} \cdot (-t+1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & t+1 & | & 1 \\ 0 & -t^2+t & 0 & | & -2t-4 \end{pmatrix} \cdot (t^2-t)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & t+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & t^3-t & | & t^2-3t-4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & t+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & t(t-1)(t+1) & | & (t+1)(t-4) \end{pmatrix}$$

- genau eine Lösung für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$:

$$L = \left\{ \frac{1}{t(t-1)} \begin{pmatrix} -6t \\ 2t+4 \\ t-4 \end{pmatrix} \right\}$$

- unendlich viele Lösungen für $t = -1$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}$$

- keine Lösung für $t \in \{0; 1\}$:

$$L = \{\}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 2 & t+2 & 2 & | & 4 \\ -3 & 1 & t-1 & | & -2 \\ t & -1 & -2 & | & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 2 \\ \cdot (-2) \end{matrix} \cdot t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & t+2 & 2 & | & 4 \\ 0 & 3t+8 & 2t+4 & | & 8 \\ 0 & t^2+2t+2 & 2t+4 & | & 4t-4 \end{pmatrix} \cdot (-1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & t+2 & 2 & | & 4 \\ 0 & 3t+8 & 2t+4 & | & 8 \\ 0 & t^2-t-6 & 0 & | & 4t-12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & t+2 & 2 & | & 4 \\ 0 & 3t+8 & 2(t+2) & | & 8 \\ 0 & (t-3)(t+2) & 0 & | & 4(t-3) \end{pmatrix}$$

- genau eine Lösung für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$:

$$L = \left\{ \frac{1}{(t+2)^2} \begin{pmatrix} 2t+8 \\ 4t+8 \\ -2t-8 \end{pmatrix} \right\}$$

- unendlich viele Lösungen für $t = 3$:

$$L = \left\{ \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R} \right\} \text{ für } t = 3$$

- keine Lösung für $t = -2$:

$$L = \{\}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & t & 1 \\ 4+2t & 2t+2 & 3 & -2t+3 \\ 8 & 8-t & 3t-3 & -1 \end{pmatrix} \cdot (-t-2) \quad \cdot (-4)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & t & 1 \\ 0 & -t-4 & -t^2-2t+3 & -3t+1 \\ 0 & -t-4 & -t-3 & -5 \end{pmatrix} \cdot (-1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & t & 1 \\ 0 & -t-4 & -t^2-2t+3 & -3t+1 \\ 0 & 0 & -t^2-t+6 & -t+6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & t & 1 \\ 0 & t+4 & (t-1)(t+3) & 3t-1 \\ 0 & 0 & (t-2)(t+3) & 3(t-2) \end{pmatrix}$$

- genau eine Lösung für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-4; -3; 2\}$:

$$L = \left\{ \frac{1}{2(t+3)(t+4)} \begin{pmatrix} -2t^2-11t-6 \\ 4(t+3) \\ 6(t+4) \end{pmatrix} \right\}$$

- unendlich viel Lösungen für $t = 2$:

$$L = \left\{ \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R} \right\}$$

- keine Lösung für $t \in \{-4; -3\}$:

$$L = \{\}$$

f)

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & t & -8 & -20 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & t \\ 2 & 0 & -1 & t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & t \\ 0 & 4 & t & -8 & -20 \\ t & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & t & 1 \end{pmatrix} \cdot (-t) \quad \cdot (-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & t \\ 0 & 4 & t & -8 & -20 \\ 0 & t & 1 & -t+2 & -t^2-1 \\ 0 & 2 & -1 & t-2 & -2t+1 \end{pmatrix} \cdot (-t) \quad \cdot 4 \quad \cdot (-2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & t \\ 0 & 4 & t & -8 & -20 \\ 0 & 0 & t^2-4 & -4t-8 & 4t^2-20t+4 \\ 0 & 0 & t+2 & -2t-4 & 4t-22 \end{pmatrix} \cdot (-t-2) \quad \text{[wegen } t^2-4 = (t+2)(t-2) \text{]}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & t \\ 0 & 4 & t & -8 & -20 \\ 0 & 0 & t^2-4 & -4t-8 & 4t^2-20t+4 \\ 0 & 0 & 0 & 2t^2-4t-16 & 10t-40 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & t \\ 0 & 4 & t & -8 & -20 \\ 0 & 0 & (t-2)(t+2) & -4(t+2) & 4(t^2-5t+1) \\ 0 & 0 & 0 & 2(t-4)(t+2) & 10(t-4) \end{array} \right)$$

– genau eine Lösung für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$:

$$L = \left\{ \frac{1}{t+2} \begin{pmatrix} -4t+7 \\ -t^2-6t+12 \\ -4t+12 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

– unendlich viele Lösungen für $t = 4$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$$

– keine Lösung für $t = -2$:

$$L = \{\}$$

g) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & t+8 \\ 4 & t & -1 & 2 & 5t+5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3t \\ 0 & 4 & -t+2 & 0 & -t+14 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-4) \downarrow \\ \cdot(-1) \downarrow \end{array}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & t+8 \\ 0 & t-8 & -5 & -2 & t-27 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2t-8 \\ 0 & 4 & -t+2 & 0 & -t+14 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \downarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & t+8 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2t-8 \\ 0 & t-8 & -5 & -2 & t-27 \\ 0 & 4 & -t+2 & 0 & -t+14 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(t-8) \downarrow \\ \cdot 2 \downarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & t+8 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2t-8 \\ 0 & 0 & -10 & 2t-20 & 2t^2-22t+10 \\ 0 & 0 & -t+2 & 4 & 3t-2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-t+2) \downarrow \\ \cdot 10 \downarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & t+8 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2(t-4) \\ 0 & 0 & -10 & 2(t-10) & 2(t^2-11t+5) \\ 0 & 0 & 0 & -2t(t-12) & -2t(t-12)(t-1) \end{array} \right)$$

– genau eine Lösung für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0; 12\}$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ t-1 \end{pmatrix} \right\}$$

– unendlich viele Lösungen für $t = 0$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$$

– und ebenfalls für $t = 12$:

$$L = \left\{ \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 197 \\ -40 \\ -17 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -17 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$$

h)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & t & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & t \\ 3 & -2 & t & 1 \\ 2 & t & t & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \updownarrow \\ \updownarrow \\ \updownarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & t \\ 3 & -2 & t & 1 \\ 2 & t & 4 & 2 \\ 2 & t & t & 2 \end{array} \right) \cdot (-1) \downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & t \\ 3 & -2 & t & 1 \\ 2 & t & 4 & 2 \\ 0 & 0 & t-4 & 0 \end{array} \right) \cdot (-3) \downarrow \quad \cdot (-2) \downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t & -3t+1 \\ 0 & t+2 & 4 & 2t+2 \\ 0 & 0 & t-4 & 0 \end{array} \right) \cdot (-t-2) \downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t & -3t+1 \\ 0 & 0 & -t^2-2t+4 & 3t^2+3t \\ 0 & 0 & t-4 & 0 \end{array} \right) \cdot (-t+4) \downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t & -3t+1 \\ 0 & 0 & -t^2-2t+4 & 3t^2+3t \\ 0 & 0 & 0 & (3t^2+3t)(-t+4) \end{array} \right)$$

– genau eine Lösung für $t \in \{-1; 0; 4\}$ $L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ für $t = -1$, $L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ für $t = 0$ und $L = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ für $t = 4$

– keine Lösung für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 4\}$: $L = \{\}$