6.2. Prüfungsaufgaben zur Lösbarkeit von LGS

Aufgabe 1: Lösbarkeit von LGS (10)
Berechne mit Hilfe des Gauß-Verfahrens die Lösungsmengen der drei folgenden **inhomogenen** Gleichungssysteme. Gib außerdem die Lösungsmengen der entsprechenden **homogenen** Gleichungssysteme an.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 16 \\ 3 & -1 & 4 & 21 \end{array}\right)$ $\quad L_{inh} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ und $L_{hom} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 2 & 16 \\ 3 & -2 & 3,5 & 21 \end{array}\right)$ $\quad L_{inh} = \{\ \}$ und $L_{hom} = \left\{t \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R\right\}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 14 \\ 3 & 3 & 3,5 & 20,5 \end{array}\right)$ $\quad L_{inh} = \left\{\begin{pmatrix} 7/2 \\ 10/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R\right\}$ und $L_{hom} = \left\{t \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R\right\}$

Aufgabe 2: Lösbarkeit von LGS (7)
Geben Sie die Lösungsmengen der drei folgenden **inhomogenen** Gleichungssysteme. Bestimmen Sie außerdem die Lösungsmengen der entsprechenden **homogenen** Gleichungssysteme an.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 21 \\ 2 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$ $\quad L_{inh} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ und $L_{hom} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 3,5 & 21 \\ 2 & -2 & 1 & 8 \end{array}\right)$ $\quad L_{inh} = \{\ \}$ und $L_{hom} = \left\{t \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R\right\}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3,5 & 20,5 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$ $\quad L_{inh} = \left\{\begin{pmatrix} 7/2 \\ 10/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R\right\}$ und $L_{hom} = \left\{t \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R\right\}$

Aufgabe 3: Lösbarkeit von LGS (7)
Geben Sie die Lösungsmengen der drei folgenden **inhomogenen** Gleichungssysteme. Bestimmen Sie außerdem die Lösungsmengen der entsprechenden **homogenen** Gleichungssysteme an.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 16 \\ 4 & -1 & 3 & 21 \end{array}\right)$ $\quad L_{inh} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ und $L_{hom} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 4 & 16 \\ 7 & -4 & 6 & 42 \end{array}\right)$ $\quad L_{inh} = \{\ \}$ und $L_{hom} = \left\{t \cdot \begin{pmatrix} -0,4 \\ 0,8 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R\right\}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 14 \\ 7 & 6 & 6 & 41 \end{array}\right)$ $\quad L_{inh} = \left\{\begin{pmatrix} 7 \\ -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R\right\}$ und $L_{hom} = \left\{t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R\right\}$

Aufgabe 4: Lösbarkeit von LGS (10)
Berechne mit Hilfe des Gauß-Verfahrens die Lösungsmengen der drei folgenden **inhomogenen** Gleichungssysteme. Gib außerdem die Lösungsmengen der entsprechenden **homogenen** Gleichungssysteme an.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 21 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$ $\quad L_{inh} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ und $L_{hom} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 7 & -4 & 6 & 42 \\ 1 & -2 & 2 & 8 \end{array}\right)$ $\quad L_{inh} = \{\ \}$ und $L_{hom} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ 0,8 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R \right\}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 7 & 6 & 6 & 41 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right)$ $\quad L_{inh} = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R\right\}$ und $L_{hom} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R \right\}$

Aufgabe 5: Lösbarkeit von LGS mit Parameter (10)

Gegeben sind die Matrix $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t+1 & 0 \\ t & t^2 & -1 \\ 2 & t & -t \end{pmatrix}$ und die Vektor $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t-2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L_{inhomogen}$ des inhomogenen Gleichungssystems $A_t * \vec{x} = \vec{b}$ sowie die Lösungsmenge $L_{homogen}$ des homogenen Gleichungssystems $A_t * \vec{x} = \vec{0}$ für

a) $t = -1$
b) $t = 1$
c) $t = 2$.

Lösung:

a) $t = -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow L_{inh} = \{\ \}$ und $L_{hom} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R \right\}$ (3)

b) $t = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0,8 \\ 0 & 1 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & -1,8 \end{array}\right) \Rightarrow L_{inh} = \left\{\begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \\ -1,8 \end{pmatrix}\right\}$ und $L_{hom} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

(3)

c) $t = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1,5 & -2 \\ 0 & 1 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow L_{inh} = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in R\right\}$ $L_{hom} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in R \right\}$ (4)

Aufgabe 6: Lösbarkeit von LGS mit Parameter (10)

Gegeben sind die Matrix A_t und der Vektor b_t durch $A_t = \begin{pmatrix} 3t+1 & 5t & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & t^2 - t \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} 2t+4 \\ t+2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L_{inhomogen}$ des inhomogenen Gleichungssystems $A_t * \vec{x} = \vec{b}_t$ sowie die Lösungsmenge $L_{homogen}$ des homogenen Gleichungssystems $A_t * \vec{x} = \vec{0}$ für

a) $t = 0$
b) $t = 1$
c) $t = 3$

Lösung:

a) $t = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow L_{inh} = \{\ \}$ und $L_{hom} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R \right\}$ (3)

b) $t = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow L_{inh} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R \right\}$ und $L_{hom} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R \right\}$ (4)

c) $t = 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 15 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right) \Rightarrow L_{inh} = \left\{ \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\}$ und $L_{hom} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (3)

Aufgabe 7: Lösbarkeit von LGS mit Parameter (10)

Gegeben sind die Matrix $A_t = \begin{pmatrix} 3t+1 & 5t & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & t^2 - t \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} 2t+4 \\ t+2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Für welche t hat das inhomogenen Gleichungssystems $A_t * \vec{x} = \vec{b}_t$ keine, eine bzw. unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L_{inhomogen}$ des inhomogenen Gleichungssystems $A_t * \vec{x} = \vec{b}_t$ sowie die Lösungsmenge $L_{homogen}$ des homogenen Gleichungssystems $A_t * \vec{x} = \vec{0}$ für $t = -2$

Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3t+1 & 5t & 0 & 2t+4 \\ 1 & 2 & 0 & t+2 \\ 1 & 1 & t^2-t & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & t+2 \\ 1 & 1 & t^2-t & 1 \\ 3t+1 & 5t & 0 & 2t+4 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & t+2 \\ 0 & -1 & t^2-t & -t-1 \\ 0 & -t-2 & 0 & -3t^2-5t+2 \end{array}\right) \cong$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & t+2 \\ 0 & -1 & t^2-t & -t-1 \\ 0 & 0 & (t^2-t)(-t-2) & -2t^2-2t+4 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & t+2 \\ 0 & -1 & t(t-1) & -(t+1) \\ 0 & 0 & -t(t-1)(t+2) & -2(t-1)(t+2) \end{array}\right) \cong$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & t+2 \\ 0 & -1 & 0 & -3t+1 \\ 0 & 0 & -t(t-1) & -2(t-1) \end{array}\right)$ $(t \neq -2!) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5t+4 \\ 0 & 1 & 0 & 3t-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/t \end{array}\right)$ $(t \neq 0$ und $t \neq -1!) \Rightarrow$ viele Lösungen $L_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, u \in R \right\}$ bzw. $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u \in R \right\}$ für $t \in \{-2; 1\}$, eine Lösung $\vec{x}_t = \begin{pmatrix} -5t+4 \\ 3t-1 \\ 2/t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R} \backslash \{-2; 0; 1\}$ und keine Lösung für $t = 0$.

Aufgabe 8: Lösbarkeit von LGS (10)

Gegeben sind die Matrix $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t+1 & 0 \\ t & t^2 & -1 \\ 2 & t & -t \end{pmatrix}$ und die Vektoren $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t-2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen homogenen Gleichungssystems $A_2 * \vec{x} = \vec{0}$. Zeigen Sie, daß der Vektor $\vec{c}$ eine spezielle Lösung des Systems ist. (6)

b) Für welche Werte von t hat das lineare Gleichungssystem $A_t * \vec{x} = \vec{b}_t$
- genau eine Lösung
- keine Lösung
- unendlich viele Lösungen?

Bestimmen Sie im Fall der eindeutigen Lösbarkeit den Lösungsvektor. (11)

Lösung

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 2 & 4 & -1 & | & 0 \\ 2 & 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -4 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \{k\vec{x} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $k \in \mathbb{R}\}$. Wegen $\vec{c} = (-1)\ \vec{x}$ ist $\vec{c} \in L$. $(k = -1)$

b) $\begin{pmatrix} 1 & t+1 & 0 & | & 1 \\ t & t^2 & -1 & | & t-2 \\ 2 & t & -t & | & -2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & t+1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -t & -1 & | & -2 \\ 0 & -t-2 & -t & | & -4 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & t+1 & 0 & | & 1 \\ 0 & t & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & (t-2)(t+1) & | & 2(t-2) \end{pmatrix}$ für $t \neq 0$ bzw. $\cong$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & -2 & 0 & | & -4 \end{pmatrix}$ für t = 0. Daraus ergeben sich die Fälle:

- genau eine Lösung für $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 2\}$
- keine Lösung für $t = -1$
- unendlich viele Lösungen für $t = 2$.

Durch Einsetzen in die Dreiecksform für $t \neq 0$ erhält man den Lösungsvektor $\vec{x}_t = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{t+1} \\ \frac{2}{t+1} \end{pmatrix}$ zunächst nur für $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 0, 2\}$. Im Fall t = 0 ergibt sich durch Einsetzen in die zugehörige Dreiecksform $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.,

d.h., die Formel für den Lösungsvektor $\vec{x}_t = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{t+1} \\ \frac{2}{t+1} \end{pmatrix}$ gilt für $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 2\}$.

Aufgabe 9: Lösbarkeit von LGS mit Parameter mit Extremwertaufgabe

Gegeben sind die Matrix A_t und der Vektor b_t durch $A_t = \begin{pmatrix} 3t+1 & 5t & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & t^2 - t \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} 2t+4 \\ t+2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie den Lösungsvektor des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A_2 * \vec{x} = \vec{b}_2$. (3)

Berechnen Sie den Lösungsvektor des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A_{-1} * \vec{x} = \vec{b}_{-1}$. (3)

b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem $A_t * \vec{x} = \vec{b}_t$ keine, eine bzw. unendliche viele Lösungen?

Berechnen Sie den Lösungsvektor für den Fall der eindeutigen Lösbarkeit
Berechnen Sie t, x_1 und x_3 so, daß gilt: $x_2 = -4$.
Berechnen Sie t, x_1 und x_3 so, daß gilt: $x_2 = 5$. (13)

c) Zeigen Sie: $X = (E + A_2^T) * (A_1 + E)^{-1}$ ist Lösung der Matrizengleichung $(A_1^{-1} * X^{-1})^{-1} - A_2^T = E - X$. Berechnen Sie die Matrix X. (10)

d) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f die Ableitungsfunktion f' mit $f'(t) = \vec{b}_t^T * \vec{b}_{2t+2}$. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f. (4)

Lösung

Teil a) siehe Teil b)

Teil b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3t+1 & 5t & 0 & 2t+4 \\ 1 & 2 & 0 & t+2 \\ 1 & 1 & t^2-t & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & t+2 \\ 1 & 1 & t^2-t & 1 \\ 3t+1 & 5t & 0 & 2t+4 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & t+2 \\ 0 & -1 & t^2-t & -t-1 \\ 0 & -t-2 & 0 & -3t^2-5t+2 \end{array}\right) \cong$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & t+2 \\ 0 & -1 & t^2-t & -t-1 \\ 0 & 0 & (t^2-t)(-t-2) & -2t^2-2t+4 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & t+2 \\ 0 & -1 & t(t-1) & -(t+1) \\ 0 & 0 & -t(t-1)(t+2) & -2(t-1)(t+2) \end{array}\right) \cong$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & t+2 \\ 0 & -1 & 0 & -3t+1 \\ 0 & 0 & -t(t-1) & -2(t-1) \end{array}\right) (t \neq -2!) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5t+4 \\ 0 & 1 & 0 & 3t-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/t \end{array}\right)$$ (t ≠ 0 und t ≠ −1!) ⇒ viele Lösungen für $t \in \{-2; 1\}$, eine Lösung $x_t = \begin{pmatrix} -5t+4 \\ 3t-1 \\ 2/t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}\backslash\{-2; 0; 1\}$ und keine Lösung für t = 0. $-4 = x_2 = 3t - 1 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow$ $\vec{x}_{-1} = \begin{pmatrix} 9 \\ ´-4 \\ -2 \end{pmatrix}$ (=Lösung zu Teil a) bzw. $5 = x_2 = 3t - 1 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ ´5 \\ 1 \end{pmatrix}$ (=Lösung zu Teil a)

Teil c)

$(A_1^{-1}*X^{-1})^{-1} - A_2^T$	$= E - X$	| Klammern auflösen
$X*A_1 - A_2^T$	$= E - X$	| + X; $+A_2^T$
$X*A_1 + E)$	$= E + A_2^T$	| $*A_1 + E)^{-1}$ von rechts
X	$= (E + A_2^T) *(A_1 + E)^{-1}$	

$A_1 + E = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnung von $(A_1 + E)^{-1}$: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & -5 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & -5 \end{array}\right)$ => $(A_1 + E)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. $E + A_2^T =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 10 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ => $X = (E + A_2^T) *(A_1 + E)^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 10 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} * \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 10 \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 21 & -35 & 10 \\ 25 & -35 & 10 \\ -6 & 0 & 30 \end{pmatrix}$.

Teil d)

$f'(t) = (2t+4;\ t+2;\ 1)*\begin{pmatrix} 4t+8 \\ 2t+4 \\ 1 \end{pmatrix} = 10t^2 + 40t + 41 > 0$ für $t \in \mathbb{R}$; das Schaubild von f‘(t) ist eine nach oben geöffnete Parabel, die keine Nullstellen besitzt. Da f‘(t) > 0, ist f(t) monoton steigend für $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 10: Lösbarkeit von LGS mit Parameter mit Extremwertaufgabe

Gegeben sind die Matrix A_t und der Vektor b_t durch $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t+2 & t \\ t & t & 0 \\ t+1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ und $b_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t+2 \\ 3t+1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Für welche Werte von t besitzt das homogene lineare Gleichungssystem $A_t * x = 0$. nichttriviale Lösungen? Geben Sie für einen dieser Werte den Lösungsvektor an. (5)

b) Für welche Werte von t istdas inhomogene lineare Gleichungssystem $A_t * x = b_t$.
   − unlösbar
   − eindeutig lösbar?
   − mehrdeutig lösbar?
   Geben Sie den Lösungsvektor für t = 3 und t = 4 an. (8)

c) Bestimmen Sie t so, daß der Vektor $x^T = (3 \ \ -3 \ \ 1)^T$ Lösung des linearen Gleichungssytems $A_t * x = b_t$.ist. (4)

d) Bestimmen Sie t so, daß der Vektor $x^T = (6 \ \ -3 \ \ 4)^T$ Lösung des linearen Gleichungssytems $A_t * x = b_t$.ist. (4)

e) Zeigen Sie durch Umformen der Matrizengleichung $A_2 * X^{-1} - A_1 = (X * A_0^{-1})^{-1}$, daß gilt: $X = A_1^{-1} * (A_2 - A_0)$ und berechnen Sie X. (9)

f) Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den das Produkt $b_t^T * b_t$.annehmen kann. (4)

Lösung

Teil a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t+2 & t & 1 \\ t & t & 0 & t+2 \\ t+1 & 0 & -2 & 3t+1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-t) \quad \cdot(-t-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t+2 & t & 1 \\ 0 & -t(t+1) & -t^2 & 2 \\ 0 & -(t+2)(t+1) & -t^2-t-2 & 2t \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(t+2) \\ \cdot(-t) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t+2 & t & 1 \\ 0 & -t(t+1) & -t^2 & 2 \\ 0 & 0 & t(t-2) & -2(t-2)(t+1) \end{array}\right)$$

=> - keine Lösung für $t \in \{-1;0\}$
- genau eine Lösung für $t \in R\backslash\{-1;0;2\}$
- unendlich viel Lösungen für t = 2

Für t = 3 ergibt sich mit $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & -12 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -8 \end{array}\right)$ $x_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 23 \\ -13 \\ 16 \end{pmatrix}$

Für t = 4 ergibt sich mit $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -20 & -16 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -20 \end{array}\right)$ $x_3 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 42 \\ -22 \\ 25 \end{pmatrix}$

Teil b)

Für $t \in R\backslash\{-1;0;2\}$ erhält man nur die triviale Lösung $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für $t = -1$ ergibt sich $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ => $x_t = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in 3$

Für $t = 0$ ergibt sich $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$ => $x_t = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in 3$

Für $t = 2$ ergibt sich $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ => $x_t = t \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in 3$

Teil c)

$$\begin{pmatrix} 1 & t+2 & t \\ t & t & 0 \\ t+1 & 0 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t+2 \\ 3t+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 3-3t-6+t & = & 1 \\ 0 & = & t+2 \\ 3+3t-2 & = & 3t+1 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc} -2 & = & t \\ -2 & = & t \\ 1 & = & 1 \end{array} \right| \Rightarrow t = -2$$

Teil d) Analog zu Teil c) erhält man t = 1

Teil e)

$A_2 * X^{-1} - A_1$	$= (X * A_0^{-1})^{-1}$	$\vert$ Klammern auflösen
$A_2 * X^{-1} - A_1$	$= A_0 * X^{-1}$	$\vert + A_1; -A_0 * X^{-1}$
$(A_2 - A_0) * X^{-1}$	$= A_1$	$\vert$ * X von rechts
$(A_2 - A_0)$	$= A_1 * X$	$\vert * A_1^{-1}$ von links
$A_1^{-1} * (A_2 - A_0) = X$		

Berechnung von X: $A_2 - A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnung von A_1^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \cong$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A_1^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A_1^{-1} * (A_2 -$$

$$A_0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Teil f)

$f(t) = b_t^T * b_t = (1 \ \ t+2 \ \ 3t+1) * \begin{pmatrix} 1 \\ t+2 \\ 3t+1 \end{pmatrix} = 10t^2 + 10t + 6$, $f'(t) = 20t + 10$, $f''(t) = 20 \Rightarrow$ relatives Minimum bei $t = -\frac{1}{2}$ mit $f(-\frac{1}{2}) = 3{,}5$, $f'(-\frac{1}{2}) = 0$ und $f''(-\frac{1}{2}) = 20 > 0$.